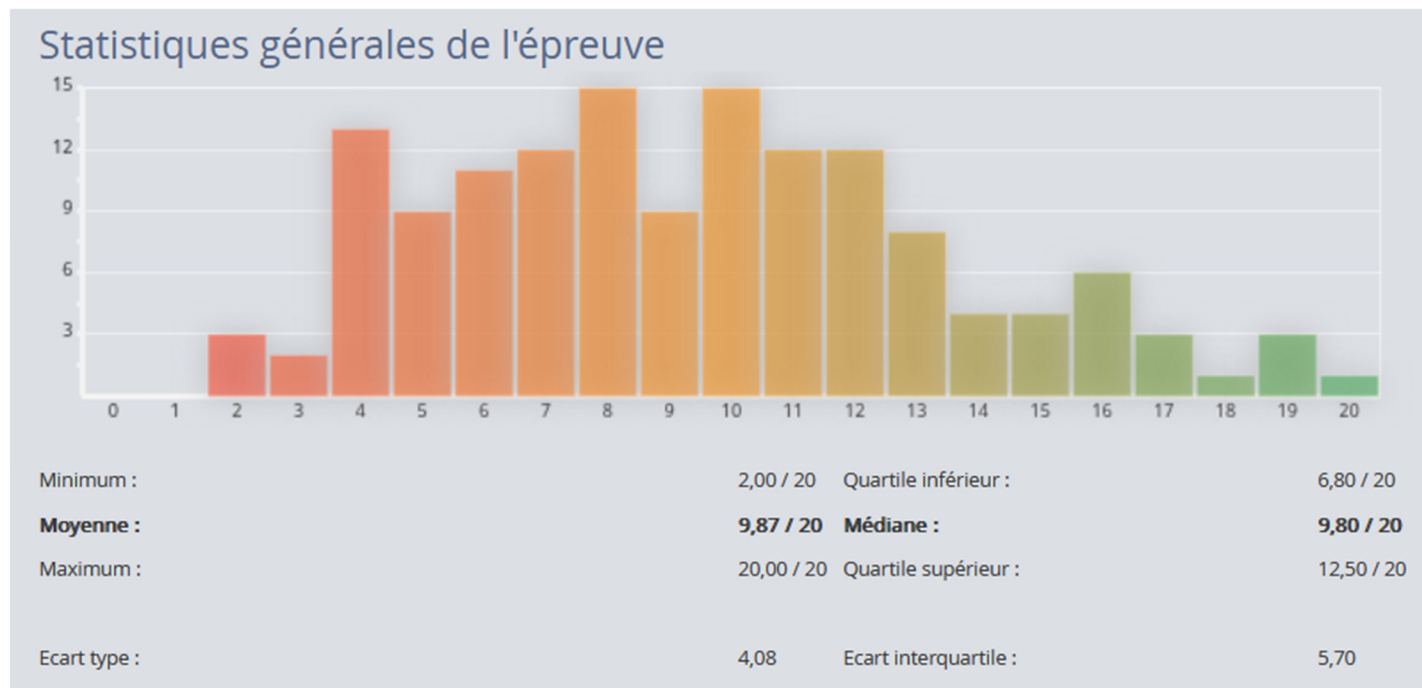


RAPPORT DE L'ÉPREUVE ECRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



Comme chaque année, l'épreuve de Méthodes de Calcul et Raisonnement est constituée de trois exercices indépendants : Algèbre, Analyse et Probabilités. Ce découpage en trois exercices indépendants correspond à celui du programme.

Chaque exercice se veut de difficulté progressive, avec des questions abordables par tous les candidats au début. L'exercice d'Algèbre propose de diagonaliser une matrice carrée de taille 2, avec une application à une équation matricielle, l'équation de Sylvester. L'exercice d'Analyse étudie une suite d'intégrales : calcul des premiers termes, signe, sens de variation, convergence et recherche d'un équivalent. Enfin, l'exercice de Probabilités étudie deux variables aléatoires définies dans le cadre de tirages successifs de boules dans une urne, sans puis avec remise.

Dans cette épreuve relativement courte, il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour obtenir une note satisfaisante. Les candidats l'ont généralement bien compris, et n'hésitent pas à ne pas aborder certaines questions pour traiter celles sur lesquelles ils se sentent plus à l'aise. Nous invitons également les candidats à consulter les rapports des années précédentes, dont les remarques sont toujours valables.

L'épreuve a permis de classer les candidats de manière satisfaisante.

Remarques générales

Les questions classiques et calculatoires, notamment en algèbre linéaire (trouver des éléments propres, inverser une matrice...) et en probabilités, sont généralement abordées par la plupart des candidats et traitées de manière satisfaisante. Notons parfois quelques problèmes de logique où la notion d'équivalence n'est pas toujours bien mise en évidence dans les raisonnements menés par les candidats.

D'une manière générale, c'est l'analyse qui pose le plus de problèmes aux candidats, en particulier le travail sur les inégalités.

Commentaires sur certaines questions du sujet

Algèbre

Q1 Question souvent traitée, par des méthodes diverses. Pour les candidats qui utilisent un déterminant, l'équivalence entre « a valeur propre de A » et « $\det(A - a I_2)$ » n'est pas toujours mise en évidence. D'autres candidats montrent que -1 et 1 sont effectivement valeurs propres, avec le calcul du rang ou du déterminant de $A \pm I_2$, mais ne précisent pas toujours pourquoi ce sont les seules.

Q2 La notion de vecteur propre est généralement comprise et les candidats traitent souvent la question de manière efficace en calculant le produit matriciel AU , mais le fait que U est non nul n'est pas souvent mentionné.

Q3

a. Les candidats ont généralement compris la manière dont les matrices D et P sont construites, attention toutefois à la lecture de l'énoncé. Une condition était en effet imposée sur l'ordre des valeurs propres sur la diagonale de D .

b. Question classique et calculatoire, souvent bien traitée.

Q4 Une question plus délicate. L'équivalence demandée doit être mise en évidence, que ce soit par la preuve de chaque implication, ou bien par une chaîne d'équivalences successives. D'autres part, certains candidats « enlèvent » les matrices P ou P^{-1} en supposant que le produit matriciel est commutatif.

Q5.

a. On a apprécié ici l'honnêteté des candidats qui, à cause d'une erreur dans la matrice P ou P^{-1} , n'obtiennent pas le résultat annoncé et le signalent.

b. Les candidats qui traitent cette question utilisent généralement l'indication fournie par l'énoncé et aboutissent à un système d'équations, mais ont parfois des difficultés à le résoudre. Ainsi, le fait que b et c n'apparaissent pas dans le système n'implique pas leur nullité. De plus, il faut également mettre en évidence un raisonnement par équivalences, y compris dans la conclusion : une phrase du style « Donc D est de la forme $D = \dots$ » indique une condition nécessaire, pas forcément suffisante.

c. Question de synthèse. Certains candidats n'utilisent pas le résultat de la question précédente et aboutissent à un système inextricable.

Q6. Question de fin d'exercice, abordée de manière satisfaisante essentiellement dans les meilleures copies.

Analyse.

Q1 Question élémentaire, traitée correctement dans 85 % des copies.

Q2

a. Un calcul de dérivée simple, réussi par 78 % des candidats.

b. Certains candidats ne font pas le lien avec la question précédente, même s'ils l'ont bien résolue, et perdent du temps en utilisant une intégration par parties pour calculer I_1 .

Q3. La positivité de la fonction exponentielle ne suffit pas ici. Par ailleurs, les candidats pensent rarement à préciser que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant.

Q4 et 5. Une série de questions très discriminantes. Des arguments précis étaient attendus dans la preuve des inégalités demandées, notamment la positivité (en 4 (a)) et la croissance (en 5 (a)) de la fonction exponentielle. La majoration de I_n de la question 5 (b) est assez souvent bien établie lorsque la question est traitée, mais elle ne prouve pas à elle seule la convergence de la suite. D'autre part, on a vu des limites dépendantes de n .

Q6 a. b. Assez souvent bien traitées.

c. Question plus difficile, nécessitant davantage de recul. Elle a servi à départager les meilleures copies.

Probabilités.

➤ Partie 1.

Q1. Correctement traitée dans toutes les copies abordant l'exercice.

Q2. Certains candidats confondent probabilité conditionnelle et probabilité d'une intersection. La formule des probabilités composées est globalement connue. Toutefois certains candidats ajoutent les probabilités au lieu de les multiplier, ce qui donne un résultat supérieur à 1. D'une manière générale, le fait de trouver un résultat incohérent comme celui-ci doit alerter les candidats, qui ne doivent pas hésiter à le signaler sur leur copie.

Q3. Mêmes remarques qu'à la question précédente. Certaines copies évoquent ici une indépendance d'événements qui n'a pas lieu d'être, puisque les tirages sont sans remise.

Q4. Le lien entre les événements ($X=k$) et ceux étudiés dans les questions précédentes n'est pas toujours vu. Même lorsque la question 4 (b) est bien résolue, certains candidats n'identifient pas la loi uniforme. On a ainsi souvent vu mention de la loi géométrique, mais il n'y a pas d'épreuve de Bernoulli répétée de manière identique et indépendante ici, puisque les tirages sont sans remise.

➤ Partie 2.

Q1. Assez souvent bien traitée.

Q2. Question de fin de sujet, dont le traitement a pu pâtir du manque de temps. Si le principe du calcul est assez souvent identifié, les candidats ne pensent pas toujours à préciser les hypothèses d'incompatibilité et d'indépendance.