

MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Exercice d'Algèbre

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1 .
2. (a) Vérifier que $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A . Préciser la valeur propre associée.
(b) Donner sans justification $m \in \mathbb{R}$ tel que $V = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre associé à la valeur propre -1 .
3. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D seront rangés dans l'ordre croissant, et les coefficients de la deuxième ligne de P seront égaux à 1 .
(b) Calculer P^{-1} .

Dans la suite de l'exercice, on étudie l'équation

$$AX + XA = B, \quad (E)$$

où l'inconnue X est une matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A est la matrice étudiée au début de l'exercice, et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice donnée.

4. Pour X et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $Y = P^{-1}XP$ et $C = P^{-1}BP$, où P est la matrice trouvée à la question 3. (a).

Démontrer l'équivalence :

$$AX + XA = B \iff DY + YD = C.$$

5. On suppose dans cette question que $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DY + YD = C$. On pourra poser

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des nombres réels.}$$

(c) En déduire la résolution de l'équation (E).

6. On suppose à présent que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. L'équation (E) a-t-elle des solutions? Justifier la réponse.

Exercice d'Analyse

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calculer $I_0 = \int_0^1 e^x dx$.

2. (a) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x - e^x$. On admet que g est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer sa dérivée.

(b) En déduire le calcul de $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$.

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

4. (a) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, comparer x^n et x^{n+1} , puis $x^n e^x$ et $x^{n+1} e^x$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .

5. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x^n e^x \leq ex^n$.

(b) Démontrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

6. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

(b) Exprimer, pour tout entier naturel n , I_n en fonction de I_{n+1} .

(c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice de Probabilités

Soit $N \geq 3$ un nombre entier. Une urne contient N boules : $N - 1$ boules vertes et 1 boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne. Pour tout entier naturel non nul i , on considère les événements :

- V_i : on tire une boule verte au $i^{\text{ème}}$ tirage ;
- R_i : on tire la boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage.

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que $N = 3$. L'urne contient donc 2 boules vertes et 1 boule rouge. On effectue des tirages **sans remise** dans cette urne, jusqu'à obtenir la boule rouge.

1. Donner sans justification $P(R_1)$.
2. (a) Que valent $P(V_1)$ et $P_{V_1}(R_2)$? Aucune justification n'est demandée.
(b) Calculer alors la probabilité de l'événement $V_1 \cap R_2$.
3. Démontrer que $P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) = \frac{1}{3}$.
4. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule rouge.
 - (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs de $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$. Justifier.
 - (c) Reconnaître alors la loi de X .
 - (d) Quel est le nombre moyen de tirages à effectuer pour obtenir la boule rouge?

Partie 2

On suppose à présent que N est un entier naturel supérieur ou égal à 3, et on effectue des tirages **avec remise** de la boule tirée dans l'urne.

1. Pour tout entier naturel non nul i , donner $P(R_i)$ et $P(V_i)$ en fonction de N . Aucune justification n'est attendue.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une boule rouge et au moins une boule verte. Par exemple, si les tirages ont donné successivement Verte, Verte, Verte, Rouge, Verte, Rouge, ..., alors $Y = 4$.
 - (a) En remarquant que $(Y = 3) = (R_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap R_3)$, calculer soigneusement $P(Y = 3)$.
 - (b) Déterminer $P(Y = k)$, où k est un entier supérieur ou égal à 2.

FIN DU SUJET