

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1 à 11.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

LES CHEVEUX DE PÉLÉ

Le présent sujet aborde plusieurs aspects physiques concernant les cheveux de Pélé. La première partie s'intéresse à la formation des filaments. La seconde partie étudie les aspects thermodynamiques de la solidification de la lave. La dernière partie traite d'un problème mécanique permettant de comprendre la dispersion des cheveux de Pélé sur l'île de la Réunion.

Les trois parties composant le sujet sont largement indépendantes, il est vivement conseillé de répartir un temps de travail équilibré sur chacune d'entre elles.

Introduction

Les cheveux de Pélé désignent les fibres de verre se formant lorsqu'une particule de lave en fusion projetée dans les airs s'étire à cause du vent et se solidifie en prenant l'allure d'un cheveu. Ils mesurent une fraction de millimètre en largeur et peuvent atteindre des longueurs de plusieurs centimètres.

La viscosité de la lave et la vitesse du vent sont des facteurs d'influence sur la géométrie finale. Les cheveux de Pélé peuvent ne pas s'étirer complètement en filaments : leur base, de la forme d'une goutte solidifiée, est appelée larme de Pélé.

En fonction de la vitesse du vent, les cheveux de Pélé peuvent être transportés à des kilomètres du lieu de leur formation jusqu'à des zones agricoles. Ils constituent alors une catastrophe naturelle car les cultures sont alors rendues impropres à la consommation et le bétail ne peut pâturer dans les prés contaminés, sous peine de risquer de se perforer le système digestif en les ingérant.

Document 1 – Illustrations de cheveux de Pélé

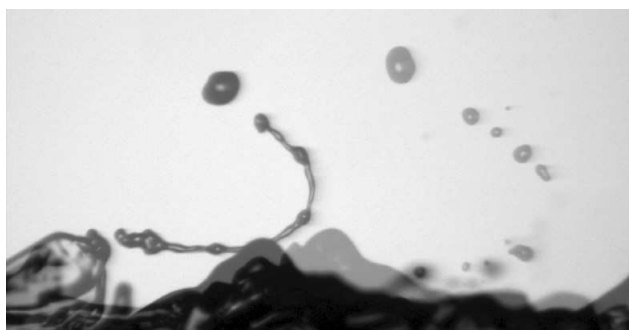
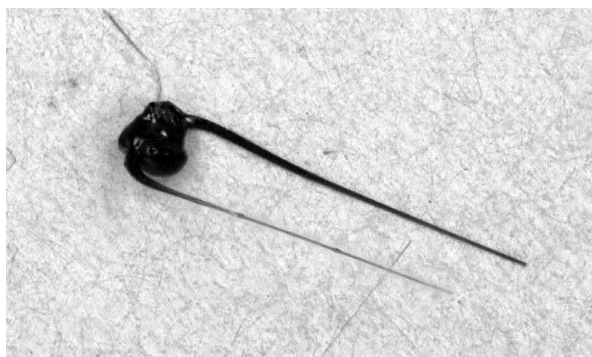


FIGURE 1 : Au dessus à gauche : les explosions de lave forment des filaments (Volcan Nyiragongo, Congo, Janvier 2011) ; à droite : des gouttes millimétriques, appelées larmes de Pélé, sont souvent retrouvées attachées à la base des cheveux. L'échantillon a une longueur de 9 mm. En dessous : photo prise en laboratoire d'un étirement de filament arraché par un courant d'air rapide imposé à la surface du fluide .

Nous mènerons d'abord une analyse des phénomènes concurrentiels en jeu dans la formation des longs filaments de lave, en dégagant des ordres de grandeurs de certains temps caractéristiques. La lave sera considérée comme un fluide visqueux de haute température plongé dans un courant d'air froid. Après avoir étudié la formation puis la solidification des cheveux de Pélé, nous nous pencherons sur leur transport dû au vent.

Données numériques utiles

Pour la lave :

- température initiale : $T_i = 1450\text{ °C}$
- température de solidification : $T_s = 700\text{ °C}$
- viscosité dynamique : $\eta = 2,5\text{ Pa} \cdot \text{s}$
- tension de surface lave-air : $\gamma = 0,5\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique : $\rho = 2,3 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- enthalpie massique de fusion : $\ell_{fus} = 4,0 \times 10^5\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$
- capacité thermique massique : $c = 1,5 \times 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- diffusivité thermique : $D_{th} = 3 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Pour l'air environnant :

- vitesse du vent : $u = 20\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- température de l'air extérieur : $T_a = 40\text{ °C}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- coefficient de traînée pour un cylindre : $C_D \approx 1$
- coefficient conducto-convectif : $h = 100\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- viscosité dynamique : $\eta_a = 2 \times 10^{-5}\text{ Pa} \cdot \text{s}$

I. Formation d'un cheveu

I.A. Volume des gouttes

Lors d'une éruption, des gerbes de lave sont projetées dans l'air à la sortie du volcan et font naître des gouttes. La présence de vent extérieur déstabilise ces gouttes de lave et tend à les diviser en plus petites gouttes. Lorsque la taille des gouttes devient très faible, le phénomène de tension de surface vient équilibrer la déstabilisation créée par le vent. Les gouttes sont supposées de géométrie sphérique.

Q1. Par analyse dimensionnelle, vérifier que le rayon typique r_0 d'une goutte de lave projetée peut s'exprimer à partir de γ la tension de surface de la lave, ρ_a la masse volumique de l'air et u la vitesse du vent extérieur à la sortie du volcan selon la relation suivante :

$$r_0 = \frac{\gamma}{\rho_a u^2}$$

Q2. En déduire la valeur numérique du volume initial V_0 typique d'une goutte.

Le raisonnement ci-dessus exclut la déformation des gouttes lors de leur projection dans les airs et conduit à un résultat légèrement trop faible par rapport à ce qu'on observe réellement lors d'une éruption. Dans la suite du sujet, nous prendrons $V_0 = 10 \text{ mm}^3$.

I.B. Accélération d'un cylindre qui s'étire

Par la suite, la goutte se transforme en un cylindre à cause de l'effet du vent. Cette géométrie sera donc adoptée pour toute cette partie.

Le cylindre est amené à s'étirer progressivement tout en s'affinant sous l'effet du vent. Nous étudions ici la cinématique de l'allongement du cylindre dans le but de déterminer son accélération. On note respectivement L la longueur totale et S l'aire de la section droite du cylindre à un instant donné. ρ désigne la masse volumique de la lave (supposée constante) qui constitue le cylindre. Il n'y a pas d'échange de matière avec l'extérieur.

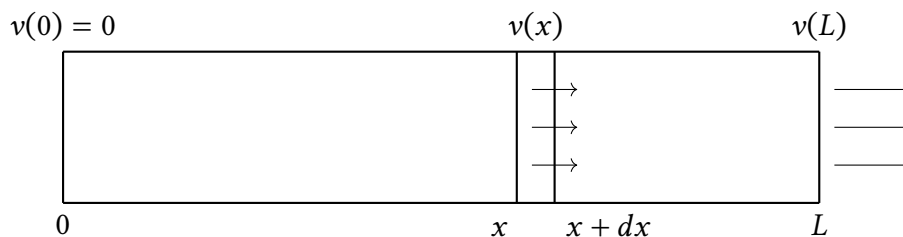


FIGURE 2 : Le cylindre de lave en fusion vue de côté à un instant t donné. Dans cette modélisation nous supposons que la face gauche du cylindre est fixée en $x = 0$ et que l'élongation se fait vers les x croissants.

Nous admettons que lors de l'étirement de ce cylindre de lave, la vitesse du fluide à une abscisse x donnée a pour expression

$$v(x) = \frac{x}{L} \times v(L)$$

Nous admettons également que l'accélération longitudinale (selon l'axe x) vérifie $ma(t) = \frac{dp}{dt}(t)$ où m désigne la masse totale du système et où la grandeur p , appelée quantité de mouvement, a pour expression à tout instant :

$$p = \int_0^L v(x) dm$$

avec dm la masse de l'élément infinitésimal de cylindre compris entre x et $x + dx$.

Q3. Justifier la conservation du volume total du cylindre.

Q 4. En déduire l'expression de la masse dm en fonction de ρ , V_0 , L et dx puis déterminer l'expression de p en fonction de ρ , V_0 et $v(L)$.

Q 5. En déduire que

$$m a(t) = \frac{\rho V_0}{2} \frac{d^2 L}{dt^2}(t)$$

I.C. Équation différentielle et temps caractéristiques

Nous cherchons maintenant à obtenir une équation qui régit la dynamique de l'allongement du cylindre, c'est-à-dire, une équation différentielle sur $L(t)$. Dans le modèle utilisé, nous admettons que deux forces, dont les expressions projetées sur l'axe (Ox) sont données ci-dessous, entrent en jeu :

- la force du vent qui tend à allonger le cylindre $F_v = \frac{1}{2} \rho_a C_D S u^2$ où u est la vitesse du vent extérieur
- la force de viscosité $F_c = -\gamma S^{1/2}$

En les prenant en compte, on aboutit alors à l'équation différentielle de l'élongation du cylindre :

$$\frac{\rho V_0}{2} \frac{d^2 L}{dt^2}(t) = \frac{1}{2} \rho_a C_D \frac{V_0}{L(t)} u^2 - \gamma \left(\frac{V_0}{L(t)} \right)^{1/2} \quad (1)$$

Cette équation non-linéaire ne possède pas de solution analytique simple, nous ne chercherons donc pas à la résoudre mathématiquement. Étant donné que deux phénomènes différents interviennent dans le processus d'élongation, nous souhaitons évaluer les temps caractéristiques qui leur sont propres à l'aide de l'équation (1).

Q 6. À temps courts, la longueur du cylindre est une distance comparable au diamètre de la goutte d'origine ($L \approx 2r_0$). À l'aide de l'équation (1), montrer en raisonnant par loi d'échelle que le temps caractéristique τ_a relatif à l'inertie du vent *uniquement* vérifie :

$$\tau_a = \frac{2r_0}{u} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}}$$

De la même façon, il est possible de déterminer le temps caractéristique des effets capillaires τ_c en négligeant cette fois l'effet du vent, et on obtient :

$$\tau_c = \sqrt{\frac{\rho V_0}{\gamma}}$$

Q 7. Réaliser l'application numérique de τ_c et commenter sachant que $\tau_a \approx 4 \times 10^{-3}$ s.

Q 8. Toujours à l'aide de l'équation (1), déterminer l'expression de la longueur à l'équilibre L_{eq} . Réaliser l'application numérique.

Q 9. Commenter la valeur obtenue pour L_{eq} et discuter de la crédibilité du modèle.

I.D. Viscosité

La lave est connue pour être un fluide très visqueux, en particulier lorsqu'elle est amenée à se refroidir. Pour mieux comprendre l'impact de la viscosité dans le processus de formation des cheveux de Pélé, nous souhaitons nous appuyer sur une expérience d'étirement de filament de fluide réalisée en laboratoire.

Q 10. En analysant les photographies ci-dessous, proposer une explication qualitative du rôle de la viscosité dans la formation des cheveux de Pélé.

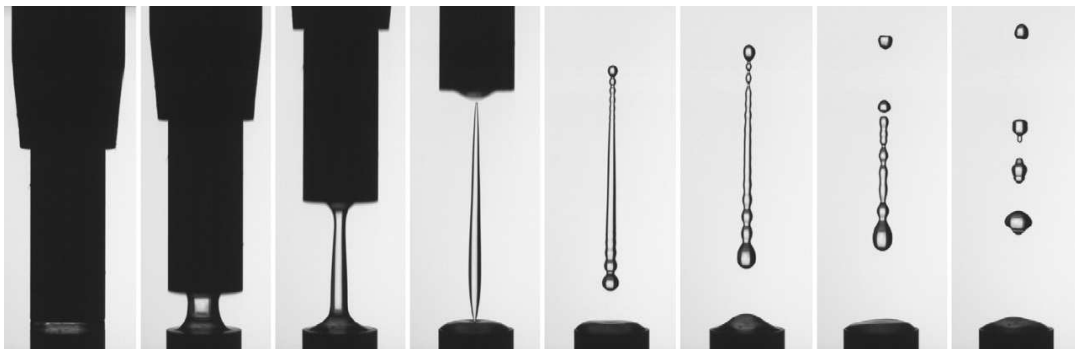


FIGURE 3 : Un volume d'eau est étiré entre deux solides circulaires de diamètre 8 mm.
Les photographies sont espacées de 25/3000 s.



FIGURE 4 : Même expérience reproduite avec une huile siliconée, 100 fois plus visqueuse que l'eau, mais une tension de surface avec l'air comparable. Le temps typique de rupture (de l'ordre de 1 s) est tellement long que le fluide ne se détache pas des rondins.
Photographies issues de E. Villermaux, C. R. Mecanique 340 (2012) 555–564.

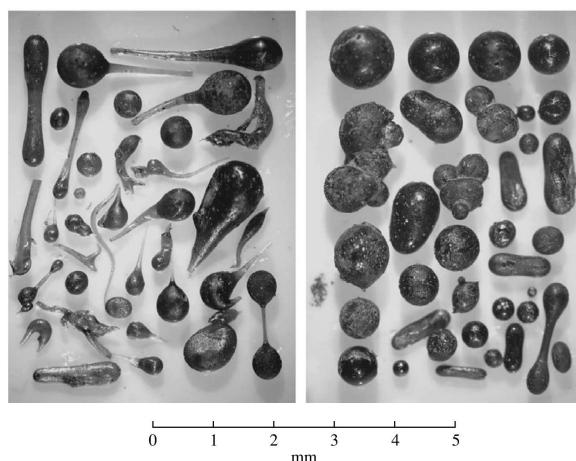


FIGURE 5 : Larmes de Pélé en volkhovite de 10000 ans retrouvées proche de la rivière Volkhov en Russie.

II. Solidification des cheveux de Pélé

Dans cette partie, nous nous intéressons au processus de solidification dans le but de dégager un temps caractérisant ce processus. En raison de la présence de vent qui constitue un courant d'air froid par rapport à la lave sur le lieu de l'éruption, la lave en fusion va subir deux transformations thermodynamiques successives : elle va d'abord refroidir puis changer d'état.

Nous supposons ici que, pendant ces deux transformations, la lave liquide a une géométrie cylindrique fixée et constante. La longueur du cylindre sera $L = 1$ cm et son rayon $R = 0,56$ mm pour garder un volume total égal à V_0 . La température T du cylindre est supposée uniforme.

II.A. Étape de refroidissement

Q 11. Le flux thermique entre l'air extérieur et la lave qui refroidit est de nature conducto-convective. Écrire l'expression du flux ϕ algébriquement reçu par le cylindre en fonction de sa température T , de sa surface totale S_{tot} , de la température extérieure T_a et du coefficient conducto-convectif h .

Q 12. En évaluant numériquement le rapport entre l'aire de la surface latérale S_{lat} et l'aire de la section droite du cylindre S , simplifier le résultat précédent.

Q 13. En réalisant un bilan thermique entre deux instants t et $t + dt$, montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température $T(t)$ du cylindre (avant que celui-ci ne change d'état) s'écrit :

$$\frac{\rho R c}{2h} \frac{dT}{dt}(t) + T(t) = T_a \quad (2)$$

Q 14. Donner l'expression du temps caractéristique τ de l'équation (2).

Q 15. Déterminer la solution de l'équation différentielle (2) à l'aide de la condition initiale.

Q 16. En déduire l'expression de la durée de refroidissement t_1 nécessaire pour passer de la température T_i jusqu'à la température T_s . L'exprimer en fonction de τ , T_i , T_a et T_s puis faire l'application numérique.

II.B. Étape de changement d'état

Le cylindre est désormais à la température T_s . L'échange de chaleur avec l'extérieur, toujours de nature conducto-convective, est maintenu et va conduire à sa solidification.

Q 17. Déterminer l'expression de la durée t_2 nécessaire pour solidifier le cylindre. Faire l'application numérique.

Q 18. En notant la somme $t_{tot} = t_1 + t_2$, tracer l'allure de la température T en fonction du temps t dans l'intervalle $[0; t_{tot}]$. Faire apparaître τ , T_i , T_a et T_s de manière explicite.

II.C. Résultats et discussion sur le modèle

Q 19. L'application numérique donne $t_{tot} \approx 11,2$ s. Commenter ce résultat en comparant aux valeurs de τ_a et τ_c présentées dans la première partie.

Q 20. L'hypothèse consistant à supposer la température uniforme nécessite d'être vérifiée. À l'aide d'une loi d'échelle, déterminer l'expression du temps de diffusion τ_{diff} de la chaleur en fonction du coefficient de diffusivité thermique D_{th} et d'une distance géométrique. Réaliser l'application numérique et conclure.

Q 21. Formuler des critiques du modèle utilisé dans cette partie.

III. Mécanique : transport des cheveux de Pélé

Un cheveu de Pélé au sommet de la montagne peut se déporter à grande distance en présence de vent. Pour évaluer l'impact sanitaire de ce phénomène, nous chercherons dans cette partie à estimer la portée d'un tir balistique sans, puis en présence de vent.

Le système choisi est un cylindre de lave indéformable, supposé déjà solidifié, de volume V_0 et de masse égale à $m = 2,3 \times 10^{-5}$ kg. Ses dimensions sont les mêmes que dans la partie précédente, c'est-à-dire une longueur $L = 1$ cm et un rayon $R = 0,56$ mm.

III.A. Vent et frottements négligés

Dans cette première partie, nous voulons déterminer la portée d'une particule de lave solide dans le cas où le vent serait négligé. Nous nous plaçons dans le référentiel terrestre supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur sera prise égale à $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La vitesse initiale du système, procurée par une explosion de lave, est notée \vec{v}_0 et fait un angle α avec le plan horizontal (voir figure 6). Nous prendrons $\|\vec{v}_0\| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ lors des applications numériques. L'origine du repère correspond au sommet du volcan d'où est projeté le système.

Le cylindre, assimilable à un point matériel, est repéré par ses coordonnées $(x(t); y(t))$.

Q 22. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, écrire et résoudre les équations différentielles pour les coordonnées $(x(t); y(t))$ du système.

Q 23. En déduire l'équation de la trajectoire.

Q 24. Déterminer littéralement la portée D du tir. Pour quelle valeur de α la portée devient-elle maximale? Application numérique de la portée maximale. Cette distance présente-elle un risque sanitaire?

Q 25. Déterminer littéralement le temps de vol τ_{vol} . Faire l'application numérique pour l'angle α maximisant la portée puis commenter.

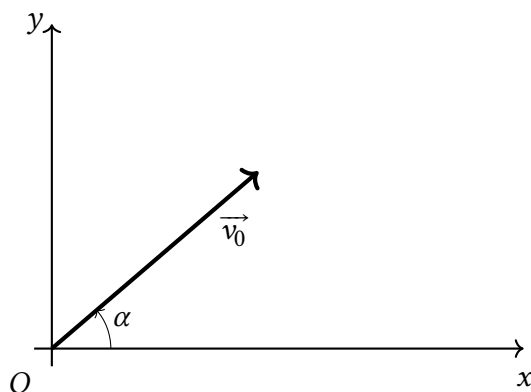


FIGURE 6 : Schéma de la situation initiale.

III.B. En présence de vent

Le vent extérieur est maintenant pris en compte. Il est considéré uniforme en tout point et de norme u constante dans le temps. Le repère est choisi tel que l'écoulement d'air est selon l'axe des x . Le référentiel et les conditions initiales restent les mêmes.

Q 26. Pour connaître les effets de l'écoulement d'air autour de notre système, nous devons évaluer le nombre de Reynolds Re . Rappeler son expression dans le cas de notre système et calculer numériquement sa valeur.

On rappelle que les forces de frottements sont proportionnelles à la vitesse de l'écoulement lorsque la viscosité prédomine (frottements linéaires), et au carré de cette vitesse lorsque la convection prédomine (frottements quadratiques).

Q 27. Le nombre de Reynolds quantifie le rapport des phénomènes de convection et de viscosité, en déduire la nature des forces de frottement qui entrent en jeu ici. Dans cette géométrie on admettra que le nombre de Reynolds critique séparant les deux régimes a une valeur proche de $Re_c \simeq 100$.

À l'aide du principe fondamental de la dynamique, on peut établir les équations différentielles pour les coordonnées $(x(t); y(t))$ du système en introduisant la vitesse du vent extérieur $\vec{u} = u\vec{e}_x$:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = -k\|\vec{v} - \vec{u}\|(v_x(t) - u) \\ \frac{dv_y}{dt}(t) = -g - k\|\vec{v} - \vec{u}\|v_y(t) \end{cases} \quad (3)$$

où $k = \frac{\rho_a C_D}{R\rho} \simeq 1 \text{ m}^{-1}$.

Le couplage entre les axes x et y d'une part et la non-linéarité des équations ci-dessus nécessitent une résolution numérique en utilisant la méthode d'Euler.

Q28. Compléter les deux lignes 8 et 10 du code, après le signe "=" de chaque ligne. On recopiera la ligne en entier.

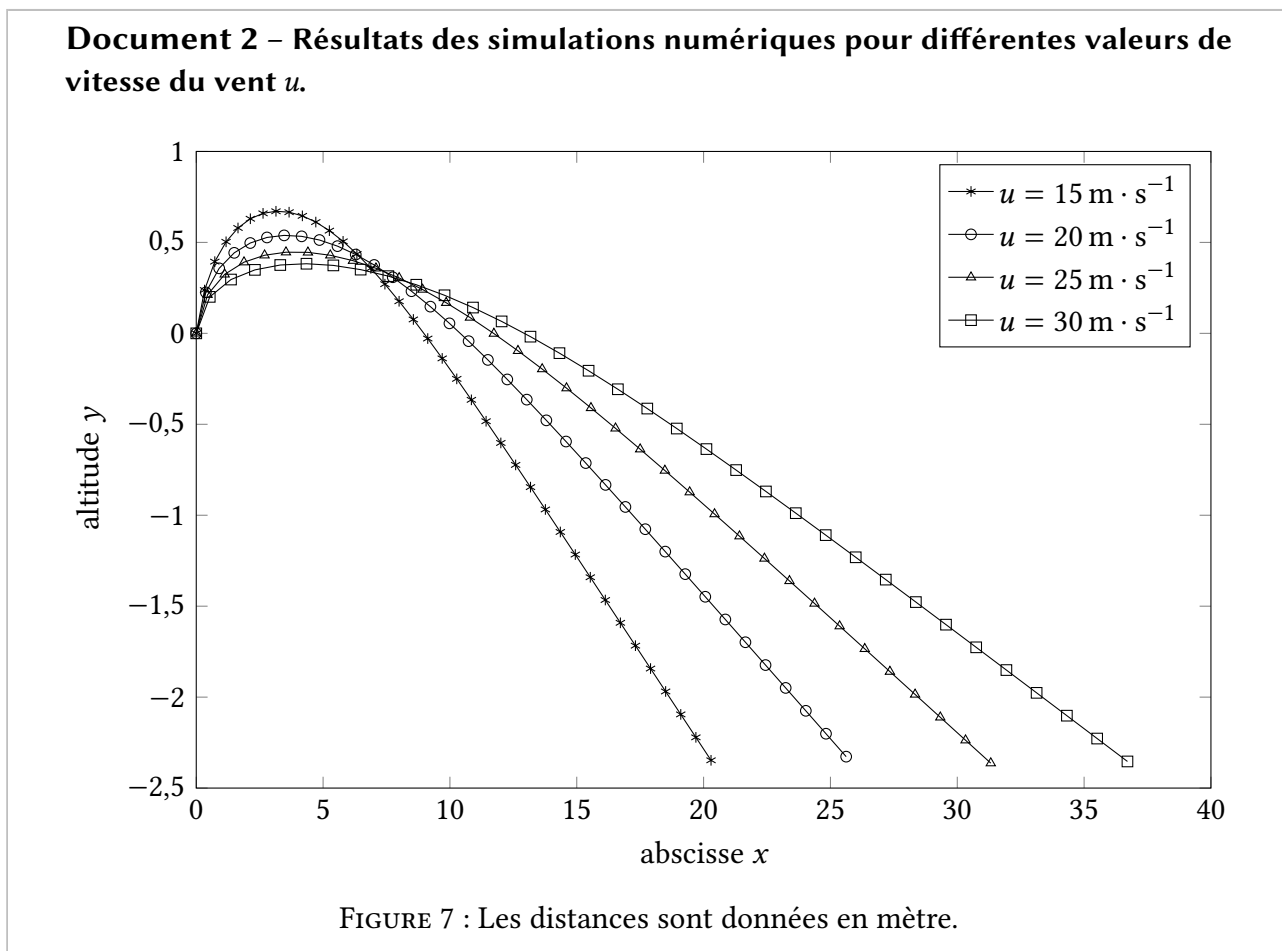
Q29. Interpréter la condition d'arrêt de la boucle **while** (lignes 31 à 37). Commenter ce choix de modélisation.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 """Fonction qui calcule les grandeurs mecaniques selon la methode d'Euler"""
5 def euler_step(t,x,y,vx,vy,k,g,dt,u):
6     t_new = t+dt
7     x_new = x+vx*dt
8     y_new =
9     vx_new = vx-k*np.sqrt((vx-u)**2+vy**2)*(vx-u)*dt
10    vy_new =
11    return(t_new,x_new,y_new,vx_new,vy_new)
12
13 """Introduction des valeurs des parametres utiles au probleme"""
14 u,g,k,alpha,V0=20,10,1,0.25*np.pi,10
15
16 """Valeur du pas de temps dt"""
17 dt = 1e-2
18
19 """Introduction des valeurs initiales des grandeurs mecaniques"""
20 t,x,y,vx,vy = 0,0,0,V0*np.cos(alpha),V0*np.sin(alpha)
21
22 """Creation des vecteurs pour stocker les valeurs des grandeurs mecaniques"""
23 t_arr = [t]
24 x_arr = [x]
25 y_arr = [y]
26 vx_arr = [vx]
27 vy_arr = [vy]
28
29 """Remplissage des vecteurs"""
30 """la commande np.append(V,e) ajoute l'element e au bout de la liste V"""
31 while y >= 0 :
32     (t,x,y,vx,vy) = euler_step(t,x,y,vx,vy,k,g,dt,u)
33     t_arr = np.append(t_arr,t)
34     x_arr = np.append(x_arr,x)
35     y_arr = np.append(y_arr,y)
36     vx_arr = np.append(vx_arr,vx)
37     vy_arr = np.append(vy_arr,vy)
38
39 """Affichage de la trajectoire"""
40 plt.plot(x_arr,y_arr,"-")
41 plt.show()

```

Si on poursuit la résolution numérique au-delà de $y = 0$, on observe les résultats numériques du document 2. L'angle initial $\alpha = \pi/4$ et la norme de la vitesse initiale $\|\vec{v}_0\| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sont fixés et leurs effets ne seront pas discutés. Seule change la valeur de la vitesse du vent u .



Q 30. Interpréter l'allure des trajectoires du document 2. Expliquer qualitativement pourquoi les cheveux peuvent être transportés à plusieurs kilomètres du volcan en présence de vent. Expliquer également pourquoi les cheveux peuvent se disperser sur de grandes surfaces.

Q 31. À l'aide des équations mécaniques (3), établir que pour t suffisamment grand, on obtient :

$$\begin{cases} v_{x,\infty} = u \\ v_{y,\infty} = -\sqrt{\frac{g}{k}} \end{cases} \quad (4)$$

Proposer un nom pour ce type de régime.

Q 32. Établir l'expression de la pente de ces trajectoires lorsque le temps devient suffisamment grand.

Q 33. À l'aide du document 3, évaluer la pente moyenne typique du flanc du Piton de la Fournaise et en déduire à quelle condition sur la vitesse du vent u un cheveu est transporté sur de grandes distances.

Document 3 – Étude de la pente moyenne le long d’une ligne de crête sur le flanc Est du Piton de la Fournaise.

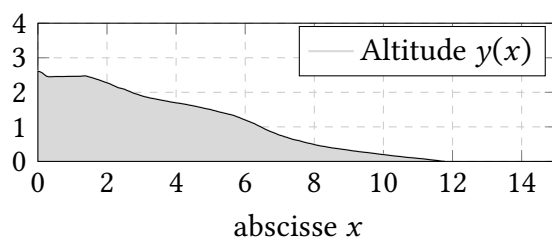


FIGURE 8 : Altitude du profil de la ligne de crête. L'origine du repère est placée au niveau de la mer, verticalement sous le pic du Piton de la Fournaise. Toutes les distances figurent en km.

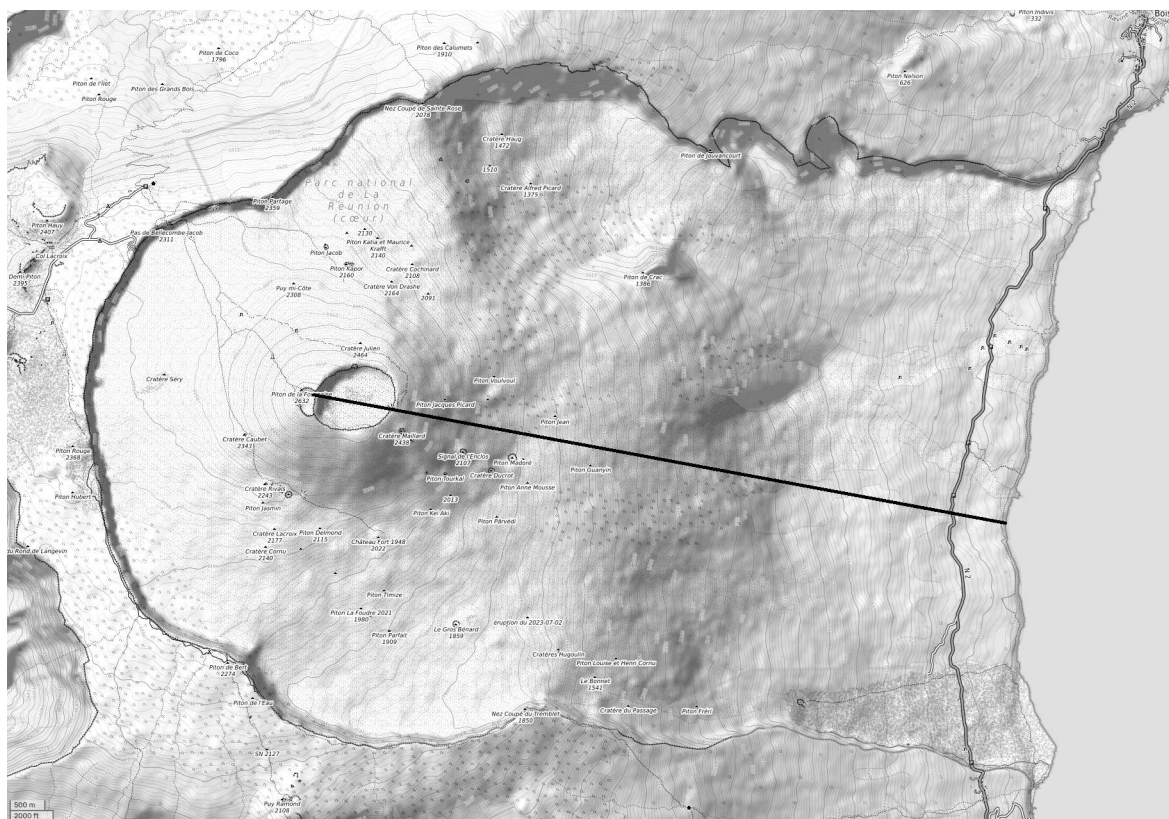


FIGURE 9 : Extrait d'une carte topographique du Piton de la Fournaise et de son littoral. La ligne de crête choisie est représentée en trait plein vue de dessus. Le point culminant sur la photographie est à 2 632 m.

FIN DU SUJET