

MATHÉMATIQUES MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Exercice d'Algèbre

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Remarque : On admet que 0 est la seule valeur propre de A , et que A n'est pas diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et préciser son inverse.

3. (a) On pose $T = P^{-1}AP$. En détaillant les calculs, vérifier que $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calculer T^2 et T^3 . En déduire T^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner sans justification une relation entre A^n et T^n .

(d) En déduire A^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

Il n'est pas demandé d'expliciter la matrice $E(t)$.

4. Quelle est la matrice $E(0)$?

5. (a) Soit s et t deux réels. Montrer que $E(s) \times E(t) = E(s + t)$.
 (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $E(t) \times E(-t)$.
 (c) En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible, et préciser son inverse.
6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(nt) = (E(t))^n$.

Exercice d'Analyse

Partie 1 : une fonction logistique

Soit $a > 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{ae^{-x} + 1}.$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 (a) Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto ae^{-x} + 1$.
 (b) En déduire la dérivée de f et déterminer son signe.
 (c) Quel est le sens de variation de f ?
2. (a) Donner $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$.
 (b) Déterminer alors les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 (c) Donner une interprétation graphique des limites trouvées à la question précédente.

Partie 2 : l'équation de Verhulst

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y(1 - y),$$

où la fonction inconnue y est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < y(x) < 1. \quad (\star)$$

Cette équation différentielle, appelée **équation de Verhulst**, est utilisée notamment en biologie pour modéliser l'évolution de certaines populations.

1. Soit y une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'encadrement $(\star)$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = \frac{1}{y(x)}$.
 (a) Exprimer z' en fonction de y' et de y .
 (b) Démontrer que la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E') : z' + z = 1.$$

- (c) Résoudre l'équation (E') (on donnera une solution particulière de (E') sous la forme d'une fonction constante).
 (d) En déduire les fonctions solutions de l'équation (E) .
2. Soit y une fonction solution de (E) . Sans utiliser l'expression de y déterminée précédemment, retrouver le sens de variation de y . On utilisera (E) et l'encadrement $(\star)$.

Exercice de Probabilités

Partie 1

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

1. **Question de cours** : Rappeler la valeur de l'espérance de X .

2. (a) Calculer $P(X \leq 2)$.

(b) En déduire que $P(X > 2) = (1 - p)^2$.

Plus généralement, on peut montrer, et on l'admettra, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k) = (1 - p)^k$.

3. Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

(a) Justifier que $(X > k + n) \cap (X > n) = (X > k + n)$.

(b) Démontrer alors que $P_{(X > n)}(X > k + n) = P(X > k)$. On dit alors que X est une variable aléatoire **sans mémoire**.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier la réciproque de la propriété démontrée à la question 3. (b) de la partie précédente.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tous entiers naturels non nuls k et n ,

$$P_{(Y > n)}(Y > k + n) = P(Y > k) \quad (**).$$

On pose $q = P(Y = 1)$. On suppose que $0 < q < 1$. On pose également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = P(Y > k)$.

1. Exprimer u_1 en fonction de q .

2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y > k) = \frac{P(Y > k + 1)}{P(Y > 1)}$. On pourra utiliser l'égalité **(**)** avec une valeur de n bien choisie.

(b) En déduire que la suite (u_k) est géométrique, et déterminer l'expression de u_k en fonction de k .

3. Soit $k \geq 2$ un entier naturel. En remarquant que $P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k)$, calculer la valeur de $P(Y = k)$.

4. Donner alors la loi de Y .

FIN DU SUJET