

MATHÉMATIQUES MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Exercice d'Algèbre

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que U est un vecteur propre de A , associé à une valeur propre que l'on précisera.
2. Déterminer un vecteur propre V de A associé à la valeur propre 0, de première coordonnée égale à 1.
3. Déterminer le réel α tel que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de A , associé à la valeur propre 1.
4. Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On précisera D , (on écrira ses coefficients diagonaux dans l'ordre croissant), ainsi que P , mais on ne calculera pas P^{-1} .

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au sous-ensemble F_A suivant de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}.$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.

5. On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité.
- (a) La matrice O_3 appartient-elle à F_A ?
- (b) La matrice I_3 appartient-elle à F_A ?
6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}M$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice P déterminée précédemment. Démontrer l'équivalence :

$$AM = M \iff DN = N.$$

7. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des nombres réels.

(a) Calculer le produit DN .

(b) On suppose que la matrice N vérifie l'égalité $DN = N$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

(c) La réciproque de la propriété démontrée à la question précédente est-elle vraie ?

8. En déduire les matrices M appartenant à F_A .

Exercice d'Analyse

Partie A : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

- Calculer $f(1)$.
- On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
 - Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donner son signe.
 - En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - En déduire que f est une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on note u_n .
 - Donner u_1 .

Dans la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à déterminer explicitement u_n . On notera de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n vérifie l'égalité $f(u_n) = n$, soit

$$u_n + \ln(u_n) = n \quad (*)$$

Partie B : étude de la suite (u_n) .

- Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- On admet que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln(x) \leq x$.
 - En utilisant la relation $(*)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{n}{2}$.
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice de Probabilités

Rappels

- On rappelle que la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- On rappelle également les valeurs remarquables suivantes :

$$\arctan(0) = 0 \text{ et } \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

ainsi que la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : On admettra que toutes les intégrales généralisées rencontrées dans cet exercice sont convergentes, sauf à la question 4. En particulier, on ne demande pas de justifier leur convergence.

- (a) Soit $A > 0$. Calculer l'intégrale $\int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt$.
(b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.
(c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X admettant la fonction f pour densité.

- Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(X < -2)$.
3. Soit F_X la fonction de répartition de X .
(a) Donner sans calcul la valeur de $F_X(a)$ pour tout $a < 0$.
(b) Montrer que pour tout $a \geq 0$, on peut écrire

$$F_X(a) = k \arctan(a),$$

où k est un réel que l'on déterminera.

- (a) Soit $A > 0$. Calculer l'intégrale $\int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt$. On pourra utiliser le changement de variable $u = 1+t^2$.
(b) L'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ est-elle convergente ?
(c) Que peut-on en déduire concernant la variable aléatoire X ?
5. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$, et on note F_Y sa fonction de répartition.
(a) Soit $a > 0$. Justifier que $P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{1}{a}\right)$, puis que $F_Y(a) = 1 - F_X\left(\frac{1}{a}\right)$.
(b) En déduire que pour tout $a > 0$, $F_Y(a) = F_X(a)$. On pourra utiliser l'égalité suivante, vraie pour tout $a > 0$:

$$\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- (c) On admet que l'égalité $F_Y(a) = F_X(a)$ est encore vraie pour $a \leq 0$. Que dire de la loi de Y ?

FIN DU SUJET