

MATHÉMATIQUES MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 3 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Exercice d'analyse

On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$.

- (a) Calculer la dérivée de la fonction $f : t \mapsto \ln(t+1)$ sur $[0, 1]$.
(b) En déduire la valeur de I_0 .
- (a) En effectuant le changement de variable $u = t + 1$, prouver que l'on a :

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u} du.$$

- (b) En déduire la valeur de I_1 .
- (a) Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, donner le signe de $\frac{t^n}{t+1}$.
(b) En déduire que la suite (I_n) est positive.
- (a) Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, comparer $\frac{t^n}{t+1}$ et $\frac{t^{n+1}}{t+1}$.
(b) Comparer alors I_n et I_{n+1} , et donner la monotonie de la suite (I_n) .
- Montrer que la suite (I_n) admet une limite finie, et que cette limite est positive.
- Montrer que pour tout entier n , on a $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
- En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n) .

8. Le but de cette question est de donner un équivalent simple de (I_n) .

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la double inégalité :

$$2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{n}{n+1} \leq 2nI_n \leq 1.$$

(c) Donner la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers l'infini.

(d) Conclure.

9. On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $K_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt$.

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}.$$

(On pourra réaliser une intégration par parties.)

(b) Prouver que la suite (K_n) tend vers 0.

(c) Montrer que $K_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

Exercice d'Algèbre

On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs (x, y, z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$, est par définition $xx' + yy' + zz'$. On considère dans tout l'exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer trois vecteurs propres u_0, u_1 et u_2 de la matrice A , en respectant les contraintes suivantes :

- u_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, et de première coordonnée 1 ;
- u_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, et de deuxième coordonnée 1 ;
- u_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et de première coordonnée 1.

(b) Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Vérifier que les trois vecteurs propres trouvés plus haut sont deux à deux orthogonaux.

3. Calculer les normes de chacun des trois vecteurs propres : $\|u_0\|$, $\|u_1\|$ et $\|u_2\|$.

On pose $e_0 = \frac{1}{\|u_0\|} u_0$, $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$, $e_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2$. On note (B) la famille (e_0, e_1, e_2) .

4. Montrer que (B) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit P la matrice de passage de la base canonique à (B) . Donner la matrice P .

6. Donner une relation entre P et sa transposée tP .

7. Donner alors l'inverse de P .

8. On pose désormais $D = P^{-1}AP$.

Calculer la matrice D .

9. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de taille 3×3 à coefficients réels.

(a) Calculer séparément les matrices DM et MD en fonction de $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

(b) On suppose de plus que $DM = MD$. Montrer que M est une matrice diagonale.

(c) On suppose réciproquement que M est une matrice diagonale. A-t-on $DM = MD$?

10. Soit M une matrice de taille 3×3 à coefficients réels, telle que $AM = MA$.

(a) Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

(b) En déduire que M est de la forme $M = PU(^tP)$, avec U une matrice diagonale et P la matrice de passage trouvée en question 5.

(c) Prouver qu'il existe trois coefficients a, b et c tels que l'on ait : $M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$.

11. Calculer les deux produits matriciels suivants :

$$A \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} A$$

12. Donner alors toutes les matrices M de taille 3×3 et à coefficients réels, telles que $AM = MA$.

Exercice de Probabilités

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

On se donne cinq variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 qui suivent chacune une loi de Poisson de même paramètre $\lambda > 0$. On rappelle pour tout entier i compris entre 1 et 5, les formules de cours suivantes :

- $E(X_i) = V(X_i) = \lambda$;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

De plus, on suppose que ces variables aléatoires $X_1, \dots, X_5$ sont deux à deux indépendantes : cela signifie que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et 5 avec $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Première partie : étude d'une somme déterministe

On pose $S = \sum_{i=1}^5 X_i$.

1. Grâce aux valeurs de $E(X_i)$ et de $V(X_i)$, calculer $E(X_i^2)$.

2. Calculer $E(S)$.

3. Soit i et j deux entiers naturels compris entre 1 et 5 avec $i \neq j$. Calculer $E(X_i X_j)$.

Indication : on rappelle que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

4. Prouver que l'on a l'égalité $E(S^2) = 5E(X_1^2) + 20E(X_1)^2$.

Indication : développer d'abord l'expression $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)^2$, puis passer à l'espérance.

5. Calculer alors $V(S)$ en fonction de λ .

Deuxième partie : loi d'une somme de deux variables aléatoires

Dans cette deuxième partie, on ne s'intéresse qu'aux deux variables aléatoires X_1 et X_2 . On rappelle qu'elles sont indépendantes et suivent chacune une loi de Poisson de même paramètre λ . On pose $Y = X_1 + X_2$.

1. Soit k un entier naturel. Montrer que :

$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^k P((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)).$$

2. Soit k un entier naturel et j un entier naturel inférieur ou égal à k . Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)$. On détaillera les calculs en justifiant.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité suivante :

$$P(Y = k) = e^{-2\lambda} \lambda^k \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!}.$$

4. Montrer aussi l'identité, pour tout entier naturel k :

$$\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} = 2^k.$$

5. En déduire la loi de Y ; on reconnaîtra une loi classique dont on précisera bien le (ou les) paramètre(s).

Troisième partie : somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

On suppose toujours que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont deux à deux indépendantes et suivent toutes une loi de Poisson de même paramètre λ .

Dans cette partie, on se donne de plus une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, 5\}$. On suppose que, pour tout entier i compris entre 1 et 5, les variables aléatoires N et X_i sont indépendantes. On pose $T = \sum_{i=1}^N X_i$.

On attire l'attention des candidats sur le fait que la variable aléatoire T est définie comme la somme d'un nombre *aléatoire* de variables aléatoires. À ce stade, on ne peut donc pas calculer $E(T)$ en invoquant directement la linéarité de l'espérance.

1. Rappeler la formule donnant la loi de la variable aléatoire N .
2. Rappeler la valeur de l'espérance de N .
3. Donner la probabilité de l'événement $(N \geq i)$ pour chaque entier i compris entre 1 et 5.
4. On définit U_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $N \geq i$, et qui vaut 0 sinon. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire U_i .
5. Calculer $E(U_i)$ en fonction de i .
6. Prouver que l'on a l'égalité :

$$T = \sum_{i=1}^5 U_i X_i.$$

7. Calculer $E(U_i X_i)$. On justifiera.
8. Donner alors la valeur de $E(T)$.

FIN DU SUJET