

Épreuve de mathématiques pratiques et informatique

Rapport du jury – Session 2023

1 Modalités de l'épreuve

L'épreuve orale de mathématiques et informatique se compose maintenant d'un oral unique.

Un temps de préparation d'une durée de 40 minutes permet aux candidats de travailler sur une question de cours très rapide et sur un exercice de mathématiques comprenant une ou plusieurs questions d'utilisation de l'outil informatique pour illustrer l'exercice. Un ordinateur est mis à disposition du candidat pendant sa préparation ainsi qu'une clé USB sur laquelle il enregistre son travail ; il peut se référer au formulaire Python mis à sa disposition quand il le souhaite, pendant la préparation et pendant l'interrogation.

L'oral à proprement parler dure 40 minutes également. Il commence par une restitution de la question de cours. Cette restitution ne dure pas plus de 2 minutes. Il peut être demandé aux candidats de préciser leur réponse, mais aucune indication sur l'exactitude de ses propos n'est fournie. Ensuite, pendant 28 minutes environ, le candidat expose ses résolutions ou ses pistes de résolution des questions de l'exercice préparé. Souvent, l'examineur lui propose aussi des indications pour discuter des questions non résolues, voire non abordées pendant la préparation. Cet exposé est l'occasion d'un échange avec l'examineur. Les dix dernières minutes de l'oral sont consacrées à un exercice d'informatique dont l'énoncé, composé de deux questions, est fourni au candidat. Il est possible, si le temps le permet, de proposer une question supplémentaire au candidat.

Pendant l'oral, le candidat est libre d'utiliser l'ordinateur mis à sa disposition ou d'écrire au tableau son ou ses programme(s) informatiques.

Dans un souci d'équité, les candidats convoqués sur une même demi-journée sont interrogés sur les mêmes sujets. Les horaires de convocation prennent en compte cette contrainte et certains candidats sont ainsi invités à patienter dans une salle prévue à cet effet sans pouvoir communiquer avec l'extérieur, mais avec la possibilité de lire, de réviser et d'échanger entre eux sans bruit par respect des autres candidats.

Les sujets sont écrits dans le respect du programme officiel et en essayant, autant que possible, d'aborder les différents grands thèmes du programme : algèbre, analyse, probabilités, algorithmique. Seule une moitié des sujets est nouvellement conçue, l'autre moitié est composée de sujets conçus et donnés dans les années précédentes et adaptés au format de la nouvelle épreuve.

2 Éléments statistiques



moyenne	médiane	écart-type
10,691	10,5	4,275

3 L'oral

3.1 Remarques générales

- Comme les années précédentes, nous avons encore une fois fortement apprécié que les candidats soient bien préparés à l'épreuve. Nous tenons une nouvelle fois à féliciter les enseignants de BCPST et nous avons apprécié de voir prises en compte les remarques des rapports précédents.
- Si le niveau des candidats est globalement tout à fait correct, il est cependant à remarquer une très grande hétérogénéité : un certain nombre de candidats maîtrisent parfaitement les éléments du programme et sont clairement très à l'aise avec les notions abordées dans les sujets traités mais d'autres candidats (dans la même proportion que les précédents) sont en grande difficulté avec les notions de base en mathématiques, le raisonnement logique, et peinent à mobiliser leurs connaissances.
- En général les candidats connaissent bien les méthodes classiques et les raisonnements fréquemment rencontrés au cours des deux années de préparation, que ce soit en algèbre, en analyse ou en probabilités. Cependant les calculs représentent trop souvent des obstacles infranchissables pour bon nombre de candidats, les simplifications sont faites bien trop tardivement et les calculs, trop longs et menés sans discernement.

• Un échantillon de sujets donnés en 2023 est publié sur le site du jury en complément de ce rapport. Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité de l'exercice pour obtenir une excellente note. Il était préférable d'avoir mené un raisonnement rigoureux et argumenté, reposant sur des connaissances solides, plutôt que d'avoir donné tous les résultats (même justes) trop vite et sans explication convaincante. Certains candidats se présentent avec un chronomètre et semblent très préoccupés par le temps et le respect d'une certaine durée, peut-être en souvenir de l'ancien format de l'épreuve d'informatique. En mathématiques-informatique, les candidats n'ont pas à se soucier du déroulement de l'épreuve, l'examineur se chargera de vérifier la répartition des différentes étapes. Nous déconseillons aux candidats de s'embarrasser d'un chronomètre.

3.2 Question de cours

Chaque sujet comportait une question de cours, précédant l'énoncé de l'exercice à préparer. Cette question était indépendante de l'exercice, d'un thème différent de celui abordé dans les exercices suivants. La question de cours revient seulement à fournir des énoncés de définitions, de propriétés, de propositions ou de théorèmes et parfois quelques applications comme la dérivée ou une primitive de fonctions simples, le tracé de fonctions usuelles.

Ces énoncés doivent être clairement donnés, les hypothèses doivent apparaître clairement et les liens logiques explicités. Les candidats peuvent soit écrire cet énoncé au tableau, soit l'exposer oralement. Dans ce dernier cas, il faut s'assurer de la précision des propos et du vocabulaire utilisé. Ce n'est pas toujours le cas.

Aucune démonstration ni détail de calculs ne sont attendus ici.

Un temps très court est consacré à cette partie de l'oral, pas plus de 2 minutes.

Les questions de cours choisies n'ont pas pour but de piéger les candidats, mais bien de leur montrer l'importance d'un apprentissage précis et rigoureux des notions abordées pendant toute l'année. Ainsi, les questions de cours sont des éléments très classiques du programme et, en général, la formulation du programme officiel est conservée.

Cependant, ces questions de cours ne sont réussies qu'à 70 %.

Nous ne pouvons qu'inciter les candidats à préparer cette première étape de l'oral pendant les deux années de préparation en vérifiant par différents moyens et à tout instant leurs connaissances du cours.

L'effet n'est pas très positif quand la question de cours, première partie de l'oral, est imprécise ou bâclée, voire complètement farfelue.

Nous invitons les candidats à bien distinguer la question demandant la définition de celle demandant une caractérisation. Par exemple, « définition d'une application injective » et « caractérisation d'une application linéaire injective » sont deux questions complètement différentes.

3.3 Exercice préparé

L'exercice peut aborder un ou deux thèmes du programme de mathématiques, il comporte une ou plusieurs questions d'informatique venant illustrer certaines questions de l'exercice.

Nous rappelons que bon nombre de ces exercices sont très longs, sûrement trop longs pour être résolus dans le temps imparti. Cependant, il n'est pas attendu des candidats une résolution complète de l'exercice, mais un exposé précis et rigoureux des questions résolues, et une présentation des démarches suivies, des recherches faites dans les autres cas. L'examineur incite le candidat à poursuivre telle ou telle piste, il est également souvent amené à vérifier les connaissances du candidat en lui demandant de définir précisément les objets manipulés. Il est alors assez surprenant de constater que, dans le cadre de l'exercice, une simple question de cours sous la forme d'une définition pose de réels problèmes. Certains candidats ne semblent plus du tout connaître le cours et ne pas voir l'intérêt d'un tel questionnement. Rappelons que toute résolution nécessite une bonne connaissance de la définition : ainsi, pour la recherche du noyau d'une matrice, donner directement un système en précisant que c'est ainsi qu'on le fait en classe mais sans faire le lien avec la définition du noyau ne peut pas satisfaire l'examineur.

Dans l'échange entre le candidat et l'examineur, la capacité du candidat à utiliser les indications de l'examineur est prise en compte dans l'évaluation.

Nous invitons les candidats à bien lire l'ensemble de l'énoncé, à identifier les questions qui le rassurent, les questions qui peuvent prendre du temps par la réalisation de calculs et à les traiter dans le temps de préparation.

- En algèbre, les candidats sont dans l'ensemble très à l'aise dans l'étude d'un endomorphisme dont la matrice de taille 2×2 est connue. Mais cette étude dans un cas plus général (en dimension plus grande), recherche du noyau, de l'image, des valeurs, des vecteurs propres, est menée de manière

un peu trop systématique et se ramène trop souvent à la résolution très pénible d'un système. Nous invitons les candidats à prendre le temps d'analyser la matrice donnée, de repérer sa forme : diagonale, triangulaire ou symétrique, de repérer les colonnes nulles ou colinéaires et celles dont les éléments non diagonaux sont nuls. Certains candidats peinent aussi à traduire des informations obtenues sur une matrice en propriétés de l'endomorphisme associé.

La notion d'espace vectoriel engendré est peu comprise dans l'ensemble. La stabilité par combinaison linéaire d'un espace vectoriel est très souvent confondue avec la linéarité d'une application.

Diagonaliser une matrice se résume pour certains à « calculer » des valeurs propres et des vecteurs propres : il est difficile d'amener le candidat à utiliser la définition de la diagonalisation.

Certains candidats ont le réflexe, pour prouver la bijectivité d'une application linéaire, d'utiliser le théorème de la bijection ; ils affirment alors que l'application linéaire est bien continue et strictement monotone sans percevoir l'incohérence de leurs propos. Cet automatisme est à combattre, nous ne pourrions que conseiller aux candidats de commencer par analyser le problème, s'assurer qu'ils ont reconnu la nature des objets qu'ils manipulent et à bien identifier à quel thème se référer. Nous remarquons une très grande difficulté des candidats à appréhender des endomorphismes sur un espace vectoriel autre que $\mathbb{R}^n$, que ce soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}(E)$ comme dans l'exemple 1 des sujets publiés. Beaucoup de candidats pensent que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n$, ne maîtrisent pas la formule du produit de deux matrices, ou encore, après avoir montré qu'une famille est orthonormale, font de gros efforts pour montrer qu'elle est libre.

- Utiliser la formule des probabilités totales, déterminer une espérance, une variance, montrer qu'une fonction est une densité ou encore utiliser le lien entre une fonction de répartition et une densité sont des aptitudes que les candidats ont bien acquises.

Cependant, pour certains, toutes les variables aléatoires discrètes ont un support infini. Ainsi, quand l'espérance d'une variable aléatoire finie est demandée, ces candidats tentent de prouver la convergence de la série, sans réaliser que la somme est finie.

Un énoncé de probabilités discrètes décrivant une expérience nécessite plusieurs lectures. Nous invitons les candidats à prendre le temps de bien comprendre le modèle, à faire des dessins, à commencer le cas échéant par traiter des cas simples. Il est toujours bien dommage de commencer l'oral par le constat que l'énoncé a mal été lu et il est alors très compliqué pour le candidat de ne pas perdre ses moyens.

L'écriture détaillée d'un événement à l'aide d'événements élémentaires est en général assez délicate. Aussi l'énoncé donne-t-il souvent l'égalité et demande seulement de la justifier.

Certains candidats mélangent variables aléatoires et événements et écrivent des égalités dépourvues de sens comme « $X \cap Y = 0$ ».

Les variables aléatoires à densité sont en général bien maîtrisées par les candidats.

Le jury a constaté une grande disparité dans la capacité des candidats à déterminer la loi de $f(X)$ en passant par la fonction de répartition de X : une bonne partie des candidats maîtrisent bien cette méthode et d'autres sont complètement perdus, peinant à suivre les indications données. De même, le calcul d'un produit de convolution n'est effectué correctement que par une minorité de candidats, notamment quand les fonctions admettent deux expressions distinctes (par exemple, la densité d'une loi exponentielle).

- En analyse, l'intégration est sûrement le chapitre que les candidats maîtrisent le mieux. La formule d'intégration par parties est bien connue et, en général, bien appliquée. Cependant, la technique de changement de variable semble parfois au point, mais peu connaissent le théorème associé et en vérifient les hypothèses.

Les calculs élémentaires, que ce soit les calculs de dérivées, de primitives, ou les calculs de limites, d'équivalents et de développements limités, restent difficiles pour de nombreux candidats. Certains omettent les symboles entre les expressions (pas d'égalité ou d'inégalité) et les calculs deviennent alors incompréhensibles.

Un manque de recul est constaté. En particulier, certains candidats donnent une limite quand n tend vers $+\infty$ dépendant de n .

La recherche des racines d'un polynôme de degré 2 peut se faire en calculant le discriminant. Cependant, ce n'est pas toujours le plus efficace : il est par exemple très maladroit d'utiliser cette méthode lorsqu'il s'agit de déterminer les racines de $X^2 - 4$ ou de $X^2 + 4$, *a fortiori* d'un polynôme déjà factorisé.

- En informatique, une très grande majorité des candidats se montre à l'aise avec l'écriture d'une fonction, la détermination du maximum sans utiliser la fonction `max`, la simulation d'une variable aléatoire de Bernoulli, ou une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ou géométrique. Toutefois, rappelons que des appels distincts à une fonction comme `rd.random()` renvoient des réalisations différentes (et, en principe, indépendantes) de la loi uniforme sur $[0, 1]$. C'est pratique pour réaliser un test statistique, mais cela a piégé de nombreux candidats quand il s'agissait de simuler $X/(1-X)$, avec X suivant une loi uniforme.

La méthode d'Euler est dans l'ensemble inconnue.

La méthode avec les sommes de Riemann pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale est connue, mais peu, dans ce cadre, font le lien avec le théorème associé.

Le tracé d'une fonction avec `matplotlib` n'est pas acquis par beaucoup. L'utilisation de cette bibliothèque figure en commentaire du programme en vigueur.

La présence, dans le corps du programme, de quelques tests simples permettant de vérifier son fonctionnement correct, au moins dans le cas de ces tests, est un plus apprécié par l'examineur.

Les questions d'informatique doivent être traitées sur l'ordinateur pendant la préparation et le code enregistré sur la clé USB mise à disposition. Écrire du code au brouillon pour le recopier au tableau représente une perte de temps qui ne peut qu'être préjudiciable au candidat.

3.4 Exercice non préparé

Il s'agit le plus souvent un exercice d'algorithmique. La première question est une assez proche du cours et ne demande pas d'appréhender de nouvelles notions. Il est demandé au candidat de ne lire que cette première question et d'y répondre avant d'aborder la deuxième question.

A certains candidats très à l'aise en informatique, une question supplémentaire a été proposée.

Pour une très grande majorité de candidats, la première question n'a pas réellement posé de difficulté, même si certaines corrections étaient à apporter sur l'initialisation, sur la condition d'une boucle `while`, ou sur les bornes de la commande `range`.

Nous pouvons remarquer cependant que les chaînes de caractères sont souvent mal connues des candidats et qu'ils hésitent à les manipuler.

Les candidats utilisent très peu les listes en compréhension.

Il aurait été apprécié par le jury que les candidats sachent écrire un des 3 tris au programme, voire en donner le nom plutôt que de massacrer le tri à bulles et l'appeler le tri naïf. Pour le tri par sélection, les candidats mutilent malheureusement la liste `L` à coups de `remove` voire à coups de `pop`.

Comme précédemment, la présence de tests simples permettant de vérifier le fonctionnement correct du programme est apprécié de l'examineur.

Au début de cet exercice, le choix est laissé au candidat entre l'ordinateur et le tableau. 58% des candidats ont choisi l'ordinateur, ce qui permet plus facilement au candidat d'exécuter, de tester... donc de corriger ses programmes, et aussi de conjecturer des résultats. Inversement, l'utilisation du tableau ne pénalise pas les candidats quant à l'usage du clavier et l'examineur les invite alors souvent à proposer des tests pour vérifier les programmes en donnant les issues attendues de ces tests.

4 Formulaire Python

Le formulaire suivant est mis à la disposition des candidats dans la salle de préparation et dans la salle d'oral. Cet aide-mémoire permet à certains candidats de retrouver des fonctions Python dont la structure est oubliée. Il ne faut en aucun cas hésiter à s'y référer. Cette liste n'est bien entendu qu'indicative, et les candidats sont libres d'utiliser d'autres modules ou fonctions de leur choix s'ils les connaissent. Plusieurs candidats ont été débloqués lors de l'oral lorsque l'examineur leur a rappelé qu'ils pouvaient se référer au formulaire.

Nous attirons l'attention des candidats sur la fonction `randint`, dont le comportement n'est pas exactement le même selon qu'elle est appelée à l'aide de la bibliothèque `random`, ou de `numpy.random`.