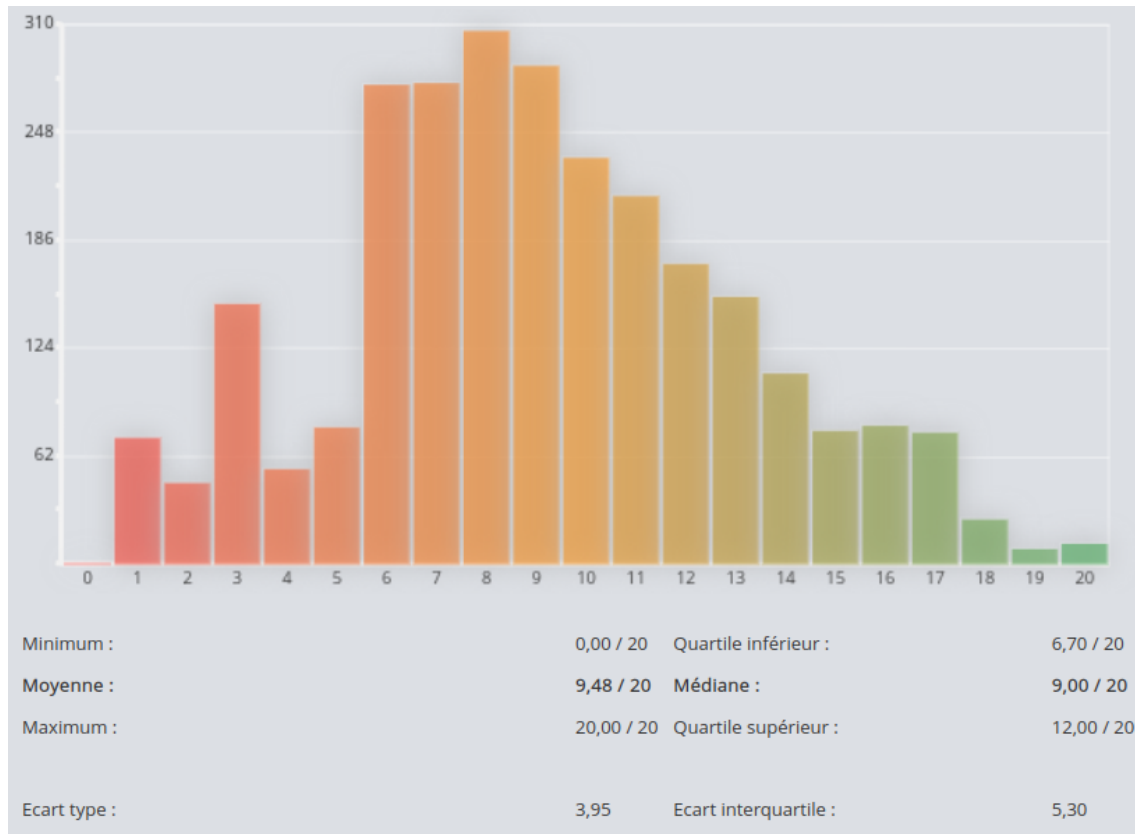


CONCOURS ABCPST - SESSION 2023

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.

De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entraînant.

Il faut faire attention aux objets manipulés. La phrase « $f(t)$ est continue » n'a pas de sens ; tout comme « Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ » ; on n'écrit pas $g(x)'$ mais $g'(x)$.

Lors de l'utilisation d'un théorème ou d'un résultat démontré dans une question précédente, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. Il est tout à fait possible d'utiliser un résultat d'une question précédente même si l'on n'a pas réussi à la traiter, mais il est souhaitable de préciser de façon explicite à quelle question on fait référence. Évidemment, il convient de mettre des majuscules aux noms propres.

On ne peut que conseiller aux candidats de bien lire les questions et de prendre le temps de justifier et rédiger les questions traitées plutôt que de se lancer dans un grappillage très rarement fructueux.

Le jury note cette année une chute du niveau et un écart qui se creuse entre le niveau des candidats et celui attendu. Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité de l'épreuve (qui est longue pour couvrir une large partie du programme) pour avoir une note excellente. Par contre, pour avoir une note correcte, il est nécessaire de connaître son cours, de savoir raisonner, rédiger et calculer.

Partie I : Quelques résultats utiles

1. La plupart des candidats font le lien avec l'expression qui suit mais la justification est souvent fautive. Il ne suffit pas de justifier que le terme général est bien défini pour justifier la convergence. Il s'agit de la première question, il est donc souhaitable de préciser qu'il s'agit d'une série exponentielle. Attention également à la maîtrise des propriétés de l'exponentielle.

Étude du nombre de points fixes d'une fonction

2. Les variations de g sont souvent obtenues. Il n'était pas nécessaire de déterminer $g(0)$ ni $\lim_{+\infty} g$. À peine la moitié des copies obtiennent tous les points à cette question.
3. On pouvait utiliser le théorème de la bijection ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Dans les deux cas, il faut en vérifier les hypothèses. La justification de la stricte monotonie n'est quasiment jamais correcte (en l'occurrence dérivée négative ne s'annulant qu'en au plus un point).
4. Cette question nécessitait de la rigueur. Notamment, justifier que ϕ s'annule sur $[0, \alpha]$ et sur $[\alpha, 1]$ ne prouve pas l'existence de deux zéros ; il faut prouver que $\phi(\alpha) \neq 0$. Certaines copies cherchent l'expression du réel α mais ne vérifie pas qu'il appartient à $[0, 1]$.

Autour de la loi de Poisson

5. Question de cours réussi à 80 %.
6. Il s'agit d'une question de cours qui a rarement été bien traitée. Il faut préciser le système complet d'événements utilisé, utiliser l'indépendance, expliquer le passage à une somme finie puis utiliser le binôme de Newton. Il n'est pas bien vu de forcer les choses afin d'obtenir le résultat attendu.
7. Il s'agissait de tester la capacité des candidats à rédiger une récurrence. Ce n'est pas une compétence acquise : on note par exemple des incohérences entre l'initialisation et l'hérédité (il s'agissait d'une récurrence sur $\mathbb{N}^*$). Beaucoup de candidats refont les calculs précédents dans l'hérédité plutôt que d'utiliser la question précédente en vérifiant évidemment les hypothèses. L'indépendance est indispensable ici ; elle est malheureusement peu citée et encore moins justifiée en utilisant le lemme des coalitions.

Résultats sur les équations différentielles

8. Plus de la moitié des candidats donnent un résultat faux. Le signe dans l'exponentielle est inversé ; il y a aussi des confusions avec le résultat lorsque a est constante d'où des résultats comme $t \mapsto Ce^{A(t)t}$. À noter que certaines copies donnent un résultat correct en notant A une primitive de $\dots -a$.
Peu de copies justifie l'existence d'une primitive de a .
Enfin, il est difficile d'avoir une phrase correcte grammaticalement et mathématiquement. On demandait un ensemble de solutions, ce qui a posé problème notamment dans la gestion des quantificateurs. Il y a une différence entre $\acute{n}$ les solutions sont de la forme... $\grave{z}$ et $\acute{n}$ les solutions sont les fonctions de la forme... $\grave{z}$.
9. Ce raisonnement simple sur la constante est trop rarement réussi. Certains candidats ne comprennent pas, s'agissant d'une fonction, la différence entre $\acute{n}$ s'annuler $\grave{z}$ et $\acute{n}$ être nulle $\grave{z}$.

10. Une question assez facile car il suffisait de constater que $(g - C)' = g'$. Les candidats ont du mal à bien rédiger un raisonnement direct ou une équivalence. À noter que certains ont cru (à tort) qu'il fallait utiliser la fonction g de la question 2.
11. Trop nombreuses sont les copies qui affirment que la nullité de $g'(t_0)$ implique que g est constante.

Partie II : Probabilité d'extinction d'une stratégie

1. Le calcul de p_0 et p_1 est réussi par la majorité. Néanmoins on attend des candidats qu'ils terminent leurs calculs : on voit des conclusions du type $0 \times \lambda$ ou $\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$. Le calcul de p_2 nécessitait plus d'autonomie ; le résultat ne peut pas dépendre de z_1 , paramètre non défini. Là encore, lors de l'utilisation de la formule des probabilités totales, il faut préciser le système complet d'événements utilisé.
2. Une large majorité pensent au théorème de la limite monotone et justifient que la suite est bornée. Très peu voient que la monotonie est reliée à une inclusion d'événements.
3. L'utilisation de la formule des probabilités totales a été trop peu identifiée et encore moins justifiée.
4. La continuité de S est trop peu évoquée. Une fois encore, il faut vérifier les hypothèses des résultats de cours utilisés. On voit des raisonnements qui n'ont pas de sens comme $p_{n+1} \rightarrow p_n$ ou $p_{n+1} \sim p_n$ ou, à partir d'un certain rang $p_{n+1} = p_n$, donc $S(p_n) = p_n$.
5. De très très rares candidats ont vu que λ représentait le nombre moyen d'enfants de chaque individu suivant la nouvelle stratégie. Il était donc cohérent de constater que si $\lambda < 1$, la probabilité que la population s'éteigne à la génération n tend vers 1.

Partie III : Étude de deux exemples

1. Question souvent abordée. Si la plupart parviennent à écrire un système correct, très peu parviennent à le résoudre. La résolution du système par équivalence ou bien les disjonctions de cas ne sont pas maîtrisées par la plupart des candidats. Moins de 10 % des copies ont trouvé les quatre solutions.
2. Il s'agit d'une question classique ; les candidats l'ont bien identifiée et l'ont quasiment tous abordée. La méthode est en place mais la mise en uvre reste très décevante. De nombreuses erreurs de calculs, des opérations illicites (rappelons que les opérations effectuées doivent figurer sur la copie sous la forme $L_i \leftarrow \dots$) et une mauvaise maîtrise des nombres complexes. Certains ont évacué la valeur propre complexe au motif que 0 n'est pas un complexe. De très nombreux candidats ne savent pas résoudre $\lambda^2 + 3 = 0$ et le font en utilisant un discriminant. On ne peut pas laisser $\frac{\sqrt{12}}{2} \dots$
Trop peu de candidats s'étonnent de trouver quatre valeurs propres ou des espaces propres réduits au vecteur nul. Lorsque l'on arrive à une absurdité, il est préférable de le constater et d'en faire la remarque plutôt que de continuer.
3. Il fallait justifier la diagonalisation de M . Le jury a récompensé ceux qui ont expliqué proprement comment obtenir les matrices D et P . Il est dommage d'obtenir une matrice P clairement non inversible.

4. La résolution d'un système 3×3 ne devrait pas poser de difficultés. Attention à la logique, si l'on part de l'égalité pour obtenir A , B et C , il faut faire une réciproque ; sinon il faut raisonner correctement par équivalences. Seul $1/3$ des candidats obtiennent la quasi-intégralité des points.
5. On pouvait traiter cette question sans avoir réussi la précédente. Seule la moitié de ceux qui l'ont traitée ont eu la totalité des points. Il s'agissait de ne pas oublier les valeurs absolues, le facteur multiplicatif $\frac{1}{4}$ et la constante.
6. Question difficile et quasiment pas traitée.
7. Question très peu traitée. Il faut s'assurer qu'une quantité est non nulle avant de diviser par celle-ci...
8. Question difficile quasiment pas traitée.