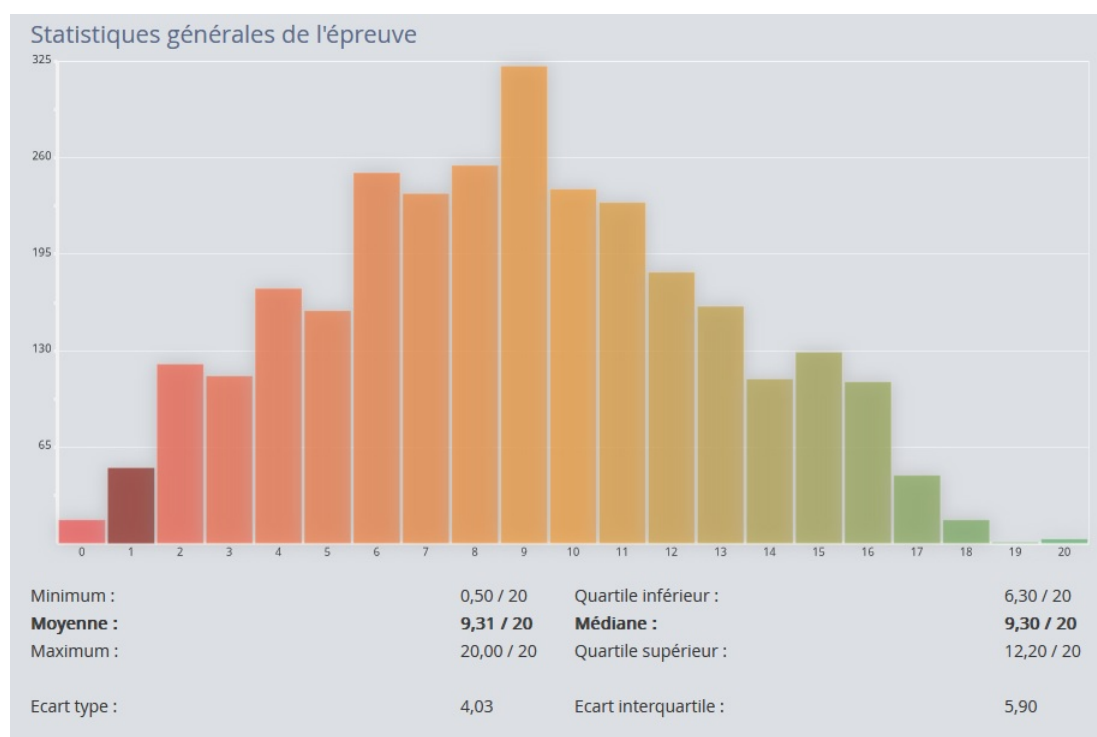




CONCOURS ABCPST - SESSION 2021

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.

De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entraînant.

Lors de l'utilisation d'un théorème ou d'un résultat démontré dans une question précédente, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. Il est tout à fait possible d'utiliser un résultat d'une question précédente même si l'on a pas réussi à la traiter, mais il est souhaitable de préciser de façon explicite à quelle question on fait référence.

On ne peut que conseiller aux candidats de bien lire les questions et de prendre le temps de justifier et rédiger les questions traitées plutôt que de se lancer dans un grappillage très rarement fructueux.

Exercice 1 :

1. Les correcteurs attendent un minimum de justifications. Par exemple, justifier l'égalité $\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1/2$ par «il y a une chance sur deux de tirer la boule numéro 1 au premier tirage» n'est pas suffisant. On attendait des candidats qu'ils parlent de loi uniforme ou d'équiprobabilité du fait du caractère indiscernables des boules.
Bien que la variance d'une loi uniforme ne soit pas explicitement au programme, le jury a accepté qu'elle soit donnée sans justifications
2. On constate que les probabilités conditionnelles ne sont pas maîtrisées, il ne s'agit pourtant que de la traduction d'un arbre. Il est conseillé de vérifier que la somme des probabilités élémentaires est égale à 1. On constate malheureusement des candidats qui ont la bonne loi mais qui font des erreurs sur les fractions et d'autres qui perdent un temps certain à calculer la variance qui n'était pas demandée.
3. Le verbe "donner" pouvait porter à confusion; les résultats non justifiés ont été acceptés.
4. Il fallait là encore utiliser que N_1 suivait une loi uniforme pour justifier la première probabilité demandée. Pour la seconde, la plupart des candidats ont l'intuition du résultat mais écrivent un produit de fractions sans le justifier par la formule des probabilités composées.
5. Peu de candidats pensent à utiliser le système complet d'évènement associé à N_1 .
6. Il s'agissait d'une question difficile qui demandait de la rigueur. Utiliser la question précédente était un bon début, qui a été valorisé, mais il ne fallait l'utiliser que pour les entiers supérieurs ou égaux à 2. Les calculs arrivant sans explications au bon résultat n'ont que peu d'intérêt quand celui-ci est donné.
7. Certains candidats obtiennent le résultat en itérant le processus. Il faut alors prendre le temps de le justifier. On pouvait se passer de récurrence, en calculant la somme
telescopique $\sum_{k=2}^{n-1} (\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k))$.
8. (a) On attend des justifications plutôt que des successions d'équivalences fausses. Il fallait évoquer la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, utiliser l'hypothèse $k \geq 2$ et la croissance de l'intégrale.
Les illustrations graphiques sont appréciées mais ne peuvent pas se substituer à un raisonnement.
(b) Le manque de rigueur d'une partie importantes des copies conduit à des $\ln 0$ ou à des discussions sur les intégrales généralisées. Rappelons qu'il n'y a pas de théorème d'encadrement sur les équivalents au programme, il fallait donc diviser par $\ln n$ et, après avoir remarqué que l'on avait $\ln n > 0$, obtenir des inégalités permettant de conclure par encadrement. Enfin, il est important de savoir prouver et non d'affirmer que $\ln(n+1) \sim \ln n$.
(c) Question réussie par ceux qui avait réussi la question 7.
9. Question très peu traitée.
10. Question très peu traitée. On pouvait néanmoins citer la formule de König-Huygens.

Exercice 2 :

I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

1. Il s'agit d'une question de cours qui a été traitée dans quasiment toutes les copies mais seul un quart a quasiment eu tous les points.

Malheureusement, certains se trompent dès l'écriture de l'équation caractéristique alors que le cas $\lambda > 0$ aurait dû évoquer un oscillateur harmonique.

Les résultats sont rarement donnés de façon rigoureuse. Il y a par exemple une différence entre :

- « $\forall t \in \mathbb{R}, \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 : y(t) = At + B$ »
- et « $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = At + B$ »

mais aussi entre « les solutions sont de la forme ... » et « les solutions sont les fonctions de la forme... ».

On lit trop souvent $\sqrt{\lambda}$ dans le cas où λ est strictement négatif !

2. La résolution de $B \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ n'a été que rarement bien faite, les points d'annulation de la fonction sin n'étant pas bien connus... Rares sont ceux qui voient qu'il faut faire une disjonction de cas.

II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

3. La coquille dans l'énoncé n'a pas gêné les étudiants. Le jury a valorisé les candidats ayant pris le temps d'intégrer le sujet et ayant donné des matrices presque justes.
4. Le lien entre A_{N-1} et $M_{N-1,\lambda}$ a été peu vu. Rappeler proprement et correctement la définition d'une valeur propre était un départ qui a été valorisé.
5. Le théorème spectral et ses deux hypothèses sont globalement bien sus. Par contre la suite de la question donne souvent lieu à des confusions entre taille, rang, dimension, ordre, cardinal.
6. Il s'agissait d'une question ultra-classique permettant de valoriser les candidats sérieux. La méthode est globalement maîtrisée cependant on constate quelques erreurs comme l'utilisation d'opérations interdites mais aussi, plus surprenant et très fréquent, des erreurs de calcul dans la résolution de $\lambda^3 - 2\lambda = 0$ ou des matrices de passages avec une colonne nulle.

Cette question fut déterminante. Elle a été traitée par 85% des copies, 35% ont quasiment tous les points tandis que plus de 20% ne gagne quasiment aucun point.

7. Question délicate qui n'a pas ou mal été abordée ; on pourrait quand même s'attendre à ce que les candidats engagent un raisonnement par double implication.
8. Il fallait connaître son cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux.
 - (a) Il fallait utiliser l'expression du cours puis résoudre un système 2×2 . La justification de la non nullité de $r_1^N - r_2^N$ est souvent absente. Les meilleurs sont capables d'utiliser $r_1 \neq r_2$ mais quasiment aucun ne vérifie que $r_1 \neq -r_2$. Certains espèrent obtenir le résultat avec un raisonnement par récurrence mais les conditions portent sur les rangs 0 et N ...
 - (b) La problématique est la même. On attend un minimum de rédaction et des justifications lors des simplifications.
 - (c) On voit trop souvent des $\sqrt{\Delta}$, alors que Δ est strictement négatif. Les calculs de module parviennent toujours à 1 même avec des racines fausses. Cette question a été réussie par moins d'un tiers des candidats...
9. Question quasiment jamais traitée.

10. On déplore que trop de candidats ne voient pas la différence entre « $\cos x \sim_0 1 - \frac{x^2}{2}$ » et « $\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ ». Pour des raisons de signe, on ne devrait pas lire « $\cos x - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$ ».
11. Question quasiment jamais traitée.

III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

12. Question quasiment jamais traitée.
13. Question simple, traitée par la moitié des copie et réussie à 70%. Le temps perdu à rechercher de telle question est rarement rentabilisé.
14. Question quasiment jamais traitée.
15. Question quasiment jamais traitée.
16. Question traitée par 17% des copies, à tort dans plus de 60% des cas car ce sont les justifications qui étaient évaluées pas le résultat. Il s'agissait de justifier le passage à l'inverse et la non nullité de $\|B\|$ et $\|X\|$.
17. Question quasiment jamais traitée.
18. Question quasiment jamais traitée.