1 Exemple 1

1.1 Question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

1.2 Exercice préparé

Pour tout $n \geqslant 1$. On considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $(K_n)_{j+1,j} = -n-1+j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Écrire une fonction `K` en `Python` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1,10]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$
On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$
   (a) Soient $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2,\pi/2[$. Montrer que
$$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1\tan(x) + \cdots + \lambda_n\tan(x)^n = 0.$$
   (b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.
   (c) Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.
   (d) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on note g_k la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$
   Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k$.
   (e) En déduire que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, g_k appartient à V_n.
   Indication : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.
   (f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.
   (g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.
   (i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

1.3 Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `gene(n)` qui prend en entrée un entier naturel non nul `n` et retourne une chaîne de `n` caractères formée aléatoirement, de façon équiprobable, des caractères `'A'`, `'C'`, `'G'`, `'T'`.
2. Écrire une fonction `nbAC(g)` qui prend en entrée une chaîne de caractères formée des caractères `'A'`, `'C'`, `'G'`, `'T'` et qui retourne le nombre de fois où la séquence `'AC'` est présente.
   Par exemple, `nbAC('GAGCACCCTACTTGGCGCGA')` retournera 2.

2 Exemple 2

2.1 Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

2.2 Exercice préparé

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.

2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
3. (a) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.
   (b) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X.
   On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste `L` *avec la commande* `set(L)` *et obtenir le cardinal d'un ensemble* `s` *avec la commande* `len(s)`.
   (c) Ecrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.
4. Calculer :
   (a) $P(X = 1)$
   (b) $P(X = n)$
   (c) $P(X = 2)$
   (d) $P(X = n - 1)$
5. Pour i entre 1 et n, on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).
   (a) Calculer la loi de X_i et son espérance.
   (b) Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable X_iX_j.
   (b) Calculer la variance de X.

2.3 Exercice non préparé

On s'intéresse dans cet exercice à des listes d'entiers. L'utilisation de `max` ou de `count` est interdite.

1. Écrire une fonction prenant en argument une liste d'entiers `L` et un entier $k \in \mathbb{N}$. Cette fonction renvoie `True` si tous les entiers de cette liste sont compris entre 0 et k et `False` sinon.
   Par exemple, pour `L = [0, 2, 0]`, *la fonction renvoie* `True` *si* $k = 2$ *ou* $k = 3$ *et* `False` *si* $k = 1$.
2. Écrire une fonction de mêmes arguments, où la liste est supposée ne contenir que des entiers compris entre 0 et k. Cette fonction renvoie l'élément le plus fréquent (ou l'un d'entre eux s'il y en a plusieurs).
   Par exemple, pour `L = [0, 4, 0, 1, 4]` *et* $k = 3$, *la fonction renvoie* 0 *ou* 4.

3 Exemple 3

3.1 Question de cours

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.

3.2 Exercice préparé

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $Sp(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

   (b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathscr{B}$.

   (c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python. *La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.*

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) & = 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) & = f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) & = 3h(t) \end{cases} \qquad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

   (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
   Vérifier qu'on a :$\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

   (c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

3.3 Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `somme(f,a,b,N)` qui retourne $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)$ où f est une fonction, a et b deux réels $(a < b)$, et N un entier supérieur à 1.

2. Écrire une fonction prenant en entrée une fonction `f`, deux réels `a`, `b` qui retourne une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

   Utiliser cette fonction pour donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t$ à l'aide de l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} f\left(\frac{t}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

4 Exemple 4

4.1 Question de cours

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

4.2 Exercice préparé

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
   Soient λ, μ deux réels strictement positifs.
   (a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\dfrac{1}{\mu}\ln(V)$.
   (b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.
   Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (d) Déterminer la loi de $-Y$.
   (e) Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x} & \text{si } x>0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu x} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$
   (f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leqslant Y]$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1;
   - X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.

   Si $i \geqslant 2$, on dit que l'événement « X_i est un **creux** » est réalisé si $[X_i \leqslant X_{i-1}]$ et $[X_i \leqslant X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
   (a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».
   (b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux » ?
   (b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \dots, X_{40}$.

4.3 Exercice non préparé

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0,...,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On considère le polynôme $P(X)=a_0+a_1X+...+a_nX^n$.
Dans Python, on représente ce polynôme P par la liste de ses coefficients `[`$a_0,...,a_n$`]`.

1. Écrire une fonction Python `eval` qui prend en argument un polynôme P et un réel a et qui renvoie $P(a)$.
2. Écrire une fonction Python `deriv` qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie P'.
3. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P)(X)=2XP(X)-P'(X)$.
   Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie $f(P)$.

5 Exemple 5

5.1 Question de cours

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

5.2 Exercice préparé

— On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.

— Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages **avec remise** dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $k \in \{0;1;2;3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer, pour tout $j \in \{0;1;2;3\}$: $\mathbf{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste `[`$Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$`]`
4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que tout $k \in \{0;1;2;3\}$, $\sum_{j=0}^{3} j\mathbf{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k$.
   (b) En déduire que $\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \mathbf{E}[Y_n]$.
   (c) En déduire l'expression de $\mathbf{E}[Y_n]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $a_n = \mathbf{P}(Y_n = 0)$, $\quad b_n = \mathbf{P}(Y_n = 1) \quad c_n = \mathbf{P}(Y_n = 2)$, $\quad$ et $\quad d_n = \mathbf{P}(Y_n = 3)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n + c_n)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4, montrer que (d_n) converge vers $1/3$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\mathbf{P}(T > n)$.
   (b) En déduire la loi de T et son espérance.

5.3 Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `somme_cumul` qui prend en entrée une liste L d'entiers et qui renvoie une liste M des sommes cumulées, c'est à dire une liste M, de même longueur que L, telle que $M[i] = \sum_{k=0}^{i} L[k]$ pour tout indice i de L.
2. On propose à deux joueurs A et F la résolution d'une suite infinie de problèmes numérotés $0, 1, \ldots, n, \ldots$.
   Ils débutent la résolution à l'instant 0 du problème numéro 0. Dès que l'un des joueurs termine la résolution du problème k il passe au problème $k+1$.
   Le numéro d'un problème est attribué au joueur qui le résout en premier. En cas de simultanéité de la résolution d'un problème par les deux joueurs celui-ci n'est pas attribué.
   On souhaite écrire une fonction Python `répartition(duréesA, duréesF)` qui, étant donnés les deux listes des durées de résolution des n premiers problèmes par les deux joueurs, renvoie les listes des numéros des problèmes attribués à A et F pour les n premiers problèmes.
   (a) `répartition([7,1,2,1,2],[4,2,4,3,1])` renvoie `([3, 4], [0, 1])`.
   Quel couple renvoie l'exécution de `répartition( [3,2,5,1,1,1],[4,2,2,4,4,2])` ?
   (b) Écrire la fonction recherchée.