

1 Exemple 1

1.1 Question de cours

Donner la définition de fonction de densité de probabilité.

1.2 Exercice préparé

1. (a) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}$.
Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
- (b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. (a) Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n .
- (b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.
3. Pour $n \geq 2$, On pose :

$$f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1$$

- (a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution dans chacun des intervalles $] -1, +\infty[$ et $] -k, -(k-1)[$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
- (b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .
La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Pour $n \geq 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1 .
 - (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $] -2, -1[$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ et en déduire la monotonie de la suite (λ_n) .
 - (b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ .
Si l'on suppose que $\ell \in] -2, -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.
 - (c) Pour $\lambda \in] -2, -1[$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ .
 - (d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leq 2 \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - (e) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de $\lambda_n + 1$. On pourra utiliser un encadrement de
$$\sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}.$$
5. On souhaite maintenant montrer ce qui a été admis en 3.(b).
Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .

1.3 Exercice non préparé

1. On considère des listes non vides ne contenant que 1 ou 2 valeurs différentes.

Par exemple ['Marwa', 'Ambre', 'Marwa', 'Ambre', 'Ambre'].

Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election1(L)` qui prend en entrée une liste `L` de cette forme et qui renvoie l'élément qui est majoritaire. La fonction doit renvoyer `None` en cas d'égalité.

Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer 'Ambre'.

2. On considère maintenant des listes non-vides, mais pouvant contenir plus de 2 valeurs différentes.

Par exemple ['Olivia', 'Gita', 'Mathys', 'Olivia', 'Mathys'].

La liste représente une urne, et on veut savoir qui a obtenu le plus de voix.

Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election2(L)` qui prend une liste ayant cette forme et qui renvoie, la liste des personnes ayant obtenu le maximum de voix (la liste contient plusieurs personnes en cas d'égalité).

Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer ['Olivia', 'Mathys'] ou ['Mathys', 'Olivia'] car Olivia et Mathys sont ex aequo avec deux voix chacun.

2 Exemple 2

2.1 Question de cours

Donner la définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice inversible.

2.2 Exercice préparé

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit positif si la propriété est présente, négatif si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

On désire dans un premier temps trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

1. Dans cette question, on étudie le protocole A , qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.
 - (a) Déterminer $A_n(\Omega)$. A_n admet-elle une espérance ?
 - (b) Déterminer la loi de A_n .
 - (c) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste L de n booléens et renvoie la valeur de A_n , en considérant qu'un **True** en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un **False** qu'elle ne la possède pas.
 - (d) Utiliser la fonction en langage Python de la question précédente pour estimer numériquement $\mathbb{E}(A_{10})$ avec $q = 0.9$.
 - (e) Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.
 - (f) On considère un entier naturel k tel que $1 \leq k < n$.
Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.
2. Dans cette question, on étudie le protocole B , qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes. On pourra noter B_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole B pour n personnes.
 - (a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de n .
 - (b) Étudier les variations et calculer la limite à droite, en 0 , de $x \mapsto x^x$.
 - (c) Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).
3. Dans cette question, on étudie un procédé « par regroupements » : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes.
Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.
 - (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.
 - (b) En déduire la loi de G .

2.3 Exercice non préparé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On parle de diviseur *strict* de n pour désigner tout diviseur k de n tel que $1 \leq k < n$. On note s_n la somme des diviseurs stricts de n . On dit que l'entier n est *parfait* si $s_n = n$.

En Python, la commande `n % k` renvoie le reste de la division de n par k (ce reste est nul si et seulement si k divise n).

1. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `s` qui prend en argument un entier n non nul et qui renvoie la somme des diviseurs stricts de n .
2. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `prop_parf` qui prend en entrée un entier N et qui renvoie la proportion des nombres n dans l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$ qui sont parfaits.

3 Exemple 3

3.1 Question de cours

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

3.2 Exercice préparé

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geq 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \dots, d_n)$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^\top DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

- (b) En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^\top DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. (a) Écrire une fonction en langage Python nommée `f` qui prend en entrée une matrice carrée M et qui renvoie $X^\top MX$ où X est un vecteur colonne dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
(b) Écrire un script qui affiche le nombre de fois que l'inégalité $X^\top (A - 3I)X > 0$ est vérifiée après 100 exécutions de la fonction pour la matrice A ci-dessous (et I la matrice identité de même taille que A).

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère les vecteurs $U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que le vecteur U_1 est un vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.
(b) Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3) .
(c) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2 P^\top$ et $P^\top P = I$.
(d) En déduire qu'il existe une matrice inversible L telle que $A = LL^\top$.
4. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Vérifier que $C = L^{-1}B(L^{-1})^\top$ est une matrice symétrique (où L est la matrice définie à la question 3(d)).

En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B = LQ\Delta(LQ)^\top$.

En utilisant les matrices Q et Δ de la question 4(a), on pose $R = LQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^\top$.

- (b) Calculer $RR^\top$.

3.3 Exercice non préparé

1. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `alea` qui prend en argument un entier positif k et renvoie 1 avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
2. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe selon les règles suivantes :
 - À l'instant $n = 0$, le mobile est au point d'abscisse 0.
 - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le mobile est au point d'abscisse k , alors à l'instant $n + 1$, il est au point d'abscisse $k + 1$ avec probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et au point d'abscisse 0 avec probabilité $\frac{1}{k+2}$.

On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n .

- (a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `simulX` qui prend en entrée un entier naturel n non nul et qui simule n déplacements du mobile et renvoie la valeur de X_n .
- (b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `attend` qui ne prend pas d'argument en entrée et qui simule les déplacements du mobile jusqu'au premier retour au point d'abscisse 0 et renvoie le plus petit n **strictement** positif pour lequel $X_n = 0$.

4 Exemple 4

4.1 Question de cours

Énoncer le lemme des coalitions.

4.2 Exercice préparé

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(H) \quad & y'' - 4y' + 5y = 0, \\(E) \quad & y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.\end{aligned}$$

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).

(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On pourra chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$$

sous la forme $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$, où c est un réel à déterminer.

2. Pour tout réel x , on note $C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ et $S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt$.

(a) Montrer que, pour tout x réel, $C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x)$ et $S(x) = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x)$.

(b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel `x`, et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0; x]$ doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x),$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F .

5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.

(a) Montrer que u est linéaire.

(b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4 .

(c) En déduire que u est un endomorphisme de F , et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

4.3 Exercice non préparé

On appelle *vecteurs creux* des vecteurs de très grande dimension, dont la grande majorité des coordonnées sont nulles. Pour coder un vecteur creux, on utilise une liste de deux listes, celle de ses coordonnées non nulles et celle des indices correspondants triée par ordre croissant, suivies de la taille du vecteur.

Ainsi, le vecteur de $\mathbb{R}^9$ $[1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0]$ est représenté par $[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]$. Les vecteurs usuels sont, eux, codés par des vecteurs `numpy`.

1. Écrire une fonction `coder` renvoyant la représentation creuse d'un vecteur. Écrire une fonction `decoder` faisant le travail inverse.

Par exemple:

`coder([1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0])` doit renvoyer `[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]`

`decoder([[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9])` doit renvoyer `[1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0]`

Pour de tels vecteurs, il serait trop coûteux, tant en temps qu'en mémoire, d'écrire toutes les coordonnées nulles et de calculer comme habituellement dans $\mathbb{R}^n$. C'est pourquoi on utilise le codage de la question précédente.

2. Écrire une fonction `prod_scal(V1, V2)` prenant en argument deux vecteurs creux appartenant au même espace $\mathbb{R}^n$, codés comme dans la première question et qui calcule leur produit scalaire. Il n'est pas autorisé de repasser par la forme usuelle en décodant `V1` et `V2`.

5 Exemple 5

5.1 Question de cours

Donner la définition de $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel n , A_n est un ensemble.

5.2 Exercice préparé

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

- (a) Représenter en Python sur un même graphe les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2, 2]$.
 - (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x .
 - (d) La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \text{Vect}(f_0, f_1, f)$$

Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F .

3. Pour toute fonction φ de F , on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.
 - (a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.
 - (b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.
 - (c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f) de F .
 - (d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f) .
 - (e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

5.3 Exercice non préparé

Le candidat pourra choisir de représenter les matrices sous la forme d'une liste de listes ou sous la forme d'un `array NumPy`.

1. Écrire une fonction `somme_ligne(M, i)` qui renvoie la somme des éléments de la ligne i de la matrice carrée M et une fonction `somme_colonne(M, j)` qui renvoie la somme des éléments de la colonne j de la matrice carrée M .

On dit qu'une matrice M est une *matrice magique* si la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de M sont toutes égales.

Exemple : $\begin{pmatrix} 11 & 15 & 19 \\ 21 & 7 & 17 \\ 13 & 23 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice magique car la somme de chaque ligne et de chaque colonne fait 45

et $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 1 & 15 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice magique car la somme de la première colonne fait 8 et celle de la deuxième colonne fait 16.

2. En déduire une fonction `est_magique(M)` qui renvoie le booléen `True` si la matrice carrée M est magique et `False` sinon.