
Corrigé - MMI BCPST 2024

Q1. On reconnaît une suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$. Il y a extinction si $\lim v_n = 0$ c'est à dire si $q \in]0, 1[$.

Q2.1 On pose $f(x) = x + \frac{x}{2} \frac{S-x}{S}$ sur $\mathbb{R}_+$. f est dérivable car polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{S}$. Le tableau de variations est le suivant :

x	0	$\frac{3S}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{9S}{8}$	$-\infty$

Q2.2. On propose le code suivant :

```
for k in range(19):
    v = L[k] + 0.5*L[k]*(S-L[k])/S
    L.append(v)
```

1
2
3

Q2.3. On propose le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

1

Q2.4. On conjecture que $\lim v_n = S$.

Q2.5. On montre par récurrence la propriété :

$$P(n) : "0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S"$$

La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse sur v_0 et car $v_1 = v_0 + \frac{v_0}{2} \frac{v_0-S}{2} \geq v_0$ car $v_0 \in]0, S[$. De plus d'après les variations de f , v_1 est plus petit que $f(S) = S$.

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$ alors, par croissance de f on obtient

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(S)$$

soit

$$0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq S$$

d'où la propriété au rang suivant.

Ainsi (v_n) est croissante et majorée par S donc elle converge vers une limite que l'on note ℓ .

En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\ell = \ell + \frac{\ell}{2} \frac{S - \ell}{S}$$

soit

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = S.$$

Comme (v_n) est croissante et $v_0 > 0$, nécessairement $\ell = S$.

Q3.1. On obtient

$$f(x) = \frac{x(S-x)(x-A)}{2}$$

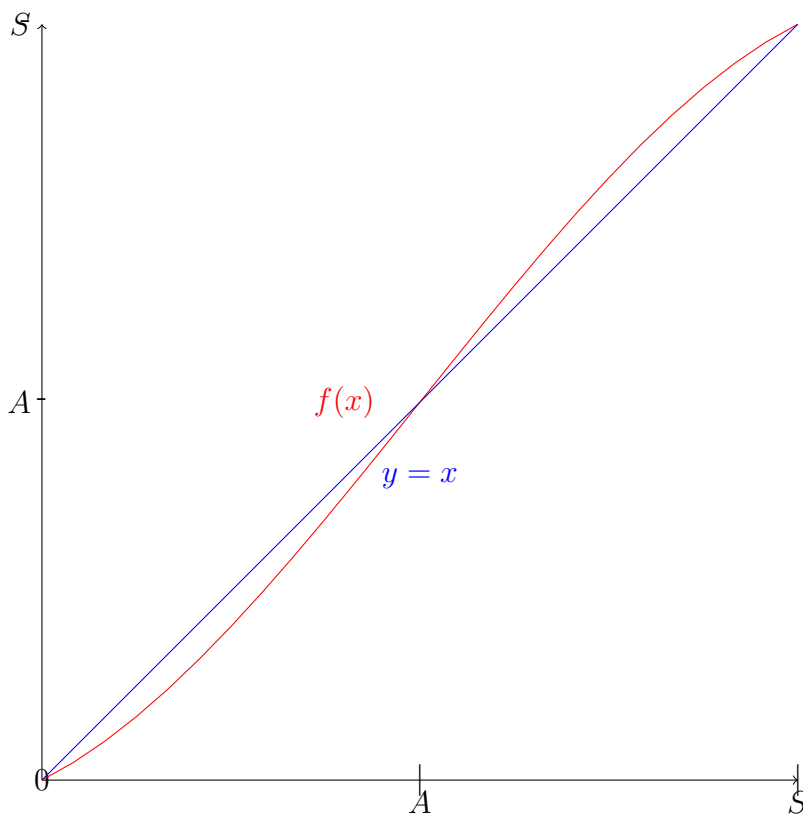
et donc

$$f(x) - x = \frac{x(S-x)(x-A)}{2}.$$

Le signe de $f(x) - x$ est donc :

- strictement positif si $x \in]A, S[$,
- strictement négatif si $x \in]0, A[$,
- nul si $x \in \{0, A, S\}$.

L'allure de courbe de la fonction est donnée par :



Q3.2. Par la question précédente on sait que $f(]0, A[) \subset]0, A[$, donc par récurrence on montre que pour tout $n, v_n \in]0, A[$.

On sait aussi que pour tout $x \in]0, A[$, $f(x) < x$ donc $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est décroissante.

Elle est décroissante et minorée donc elle converge. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\ell = f(\ell)$$

donc $\ell \in \{0, A, S\}$. Comme $v_0 < A$ et que (v_n) est décroissante on a $\ell < A$ donc $\ell = 0$.

Q3.3. Si $v_0 \in]A, S[$, alors on montre que :

- (v_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in]A, S[$.

Par le théorème des suites monotones on conclut que (v_n) converge. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient que $\lim v_n$ vaut 0, A ou S. Or $v_0 > A$ et (v_n) est croissante donc la limite est forcément S.

Si $v_0 = A$ alors on voit par récurrence que la population reste constante égale à A.

Q3.4. S est la quantité maximale de population. C'est la population atteinte s'il y a survie. A est la population initiale minimale pour avoir survie : en dessous il y a extinction.

Q4.1. Les points d'équilibre sont 0, A et S.

Q4.2. On a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$F'(y) = \frac{y(S - y) + (S - y)(y - A) - y(y - A)}{2S^2}.$$

Ceci donne :

- $F'(0) = \frac{-AS}{2S^2} < 0$.
- $F'(A) = \frac{A(S-A)}{2S^2} > 0$.
- $F'(S) = \frac{-S(S-A)}{2S^2} < 0$.

Le point A est instable, les autres sont stables.

Q4.3.

- L'équation homogène $y' = F'(x_0)y$ admet une solution toute fonction de la forme

$$y_h(t) = Ce^{F'(x_0)t}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

- Une solution particulière est donnée par

$$y_p(t) = x_0.$$

— La forme générale de solution est

$$y(t) = Ce^{F'(x_0)t} + x_0.$$

— La condition initiale donne $y(0) = C + x_0$ donc $C = y(0) - x_0$ et

$$y(t) = (y(0) - x_0)e^{F'(x_0)t} + x_0.$$

Q4.4. Si $F'(x_0) < 0$, alors $y(t)$ tend vers le point d'équilibre x_0 , sinon ce n'est pas le cas. Cela correspond bien au cas des suites où si la condition initiale est proche de A sans être égale à A (cas instable), elle ne tend pas vers A , alors que pour 0 et S c'est le cas (cas stable).

Q5. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$. On reconnaît donc une suite géométrique $v_n = q^n$. Si $q = 0$, la lignée s'éteint immédiatement. Si $q = 1$, la population est constante. Si $q > 1$, la population croît vers l'infini.

Q6. Chaque individu a zéro ou un descendant, la population vaut donc 0 ou 1 à chaque génération.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} [X_{i,1} = 1]\right) \text{ (il faut que toutes les générations aient eu un descendant)} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} P(X_{i,1} = 1) \text{ (par indépendance)} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} p \\ &= p^n. \end{aligned}$$

On a $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = 1 - p^n$ qui tend vers 1 car $p \in]0, 1[$.

Q7. Si la lignée est éteinte à la génération n , elle est forcément éteinte à la génération d'après, donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ donc $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$ donc (u_n) est croissante.

De plus (u_n) est majorée par 1 car c'est une suite de probabilités. Par le théorème de convergence monotone on sait donc que (u_n) converge.

Q8.1. $Z_1(\Omega) = \{0, 2\}$ car il y a zéro ou deux individus. $P(Z_1 = 2) = p$ et $P(Z_1 = 0) = 1 - p$.

Ainsi

$$E(Z_1) = 0P(Z_1 = 0) + 2P(Z_1 = 2) = 2p.$$

Par la formule de transfert,

$$E(Z_1^2) = 0^2 P(Z_1 = 0) + 2^2 P(Z_1 = 2) = 4p.$$

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Z_1) = E(Z_1^2) - E(Z_1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1 - p).$$

Q8.2. On utilise la formule des probabilités totales (ou composées) avec le système complet d'événements $(Z_1 = 0, Z_1 = 2)$ pour obtenir

$$P(Z_{n+1} = 0) = P(Z_1 = 0)P_{Z_1=0}(Z_{n+1} = 0) + P(Z_1 = 2)P_{Z_1=2}(Z_{n+1} = 0).$$

Q8.3. Il suffit de calculer les probabilités conditionnelles suivantes et les substituer dans l'équation de Q8.2.

- $P_{Z_1=2}(Z_{n+1} = 0)$ est la probabilités que les deux lignées indépendantes issues des individus de la génération 1 soient éteintes en n étapes, soit $P(Z_n = 0)^2 = u_n^2$.
- $P_{Z_1=0}(Z_{n+1} = 0) = 1$ car si la lignée est éteinte après une génération, elle le sera toujours à la génération $n + 1$.

Q8.4. En passant à la limite dans la relation et en notant ℓ la limite on obtient

$$\ell = (1 - p) + p\ell^2 \text{ soit } p\ell^2 - \ell + 1 - p.$$

C'est une équation polynomiale de degré 2 de discriminant $\Delta = 1 - 4p(1 - p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1 - 2p)^2 \geq 0$. On obtient donc deux racines, éventuellement confondues

$$r_1 = \frac{1 + 1 - 2p}{2p} = \frac{2 - 2p}{p} = \frac{1 - p}{p}$$

et

$$r_2 = \frac{1 - 1 + 2p}{2p} = 1.$$

Q8.5. Si $p < \frac{1}{2}$ alors $1 - p > \frac{1}{2}$, donc $\frac{p}{1-p} > 1$ ce qui est une limite exclue car la suite (u_n) est majorée par 1. La limite est forcément l'autre choix possible, donc 1. Dans le cas $p \geq \frac{1}{2}$ les deux limites possibles valent 1 donc $\lim u_n = 1$.

Q8.6. On a $p > \frac{1}{2}$ donc $1 - p < \frac{1}{2}$ donc $\frac{p}{1-p} < 1$. De plus, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1-p}{p}$. C'est évidemment vrai au rang 0. De plus si c'est vrai

à un rang n fixé alors

$$\begin{aligned}
u_n &\leq \frac{1-p}{p} \text{ donc } u_n^2 \leq \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
\text{donc } pu_n^2 &\leq \frac{(1-p)^2}{p} \\
\text{donc } 1-p+pu_n^2 &\leq (1-p) + \frac{(1-p)^2}{p} \\
\text{donc } u_{n+1} &\leq \frac{p-p^2+1-2p+p^2}{p} \\
\text{donc } u_{n+1} &\leq \frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

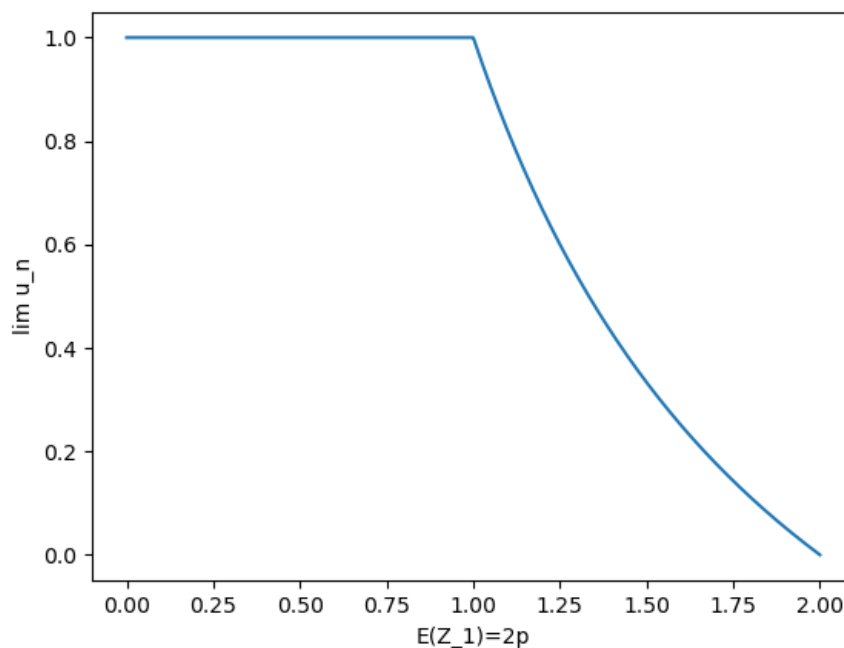
d'où l'hérédité. L'inégalité est donc vraie, par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En passant à la limite on obtient

$$\lim u_n \leq \frac{1-p}{p} < 1$$

donc la seule limite possible, dans les deux proposées, est $\lim u_n = \frac{1-p}{p}$.

Q8.7. $E(Z_1) = 2p$ donc on obtient, d'après les résultats précédents :



Il y a extinction presque-sûre si l'espérance d'un nombre de descendants est inférieure ou égale à 1, puis cette probabilité d'extinction décroît vers 0.

Q9.1. On utilise la formule des probabilités totale avec le système complet d'événements $(Z_1 = k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
 P(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) P_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p) p^k u_n^k \\
 &= (1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} (p u_n)^k \\
 &= \frac{1-p}{1-p u_n}
 \end{aligned}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $p u_n \in]0, 1[$.

Q9.2. En passant à la limite dans la relation de récurrence et en notant $\ell = \lim u_n$ on obtient

$$\ell = \frac{1-p}{1-p\ell} \iff \ell - p\ell^2 = 1-p.$$

On reconnaît l'équation de la question Q8.4. et donc, en utilisant le résultat admis

$$\ell = \min \left(1, \frac{1-p}{p} \right)$$

autrement dit 1 si $p \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1-p}{p}$ si $p > \frac{1}{2}$. En effet

$$\begin{aligned}
 \frac{1-p}{p} > 1 &\iff 1-p > p \\
 &\iff 1 > 2p \\
 &\iff \frac{1}{2} > p.
 \end{aligned}$$

Q9.3. On a $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y+1 = n) = P(Y = n-1) = (1-p)p^{n-1}$. Ainsi $Y+1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1-p)$. On a donc $E(Y) = E(Y+1) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1$. On a alors l'équivalence

$$\begin{aligned}
 E(Y) \leq 1 &\iff \frac{1}{1-p} - 1 \leq 1 \\
 &\iff 1 - (1-p) \leq 1-p \\
 &\iff p \leq 1-p \\
 &\iff 2p \leq 1 \\
 &\iff p \leq \frac{1}{2} \\
 &\iff \lim u_n = 1 \text{ par la question précédente.}
 \end{aligned}$$

Il y a donc extinction presque sûr si et seulement si l'espérance du nombre de descendant par individu est inférieure ou égale à 1.

Q10.1. λ est la paramètre de la loi de Poisson et n est le nombre de génération étudiées.

Q10.2. Il s'agit de

1. Arrêter la simulation si lignée est interrompue et renvoyer le tableau.
2. Initialiser un tableau de $n + 1$ zéros dans lequel on stockera l'évolution de la population.
3. On calcule le nombre d'individus de la génération suivante en simulant puis sommant les descendants de chaque individu.

Q10.3. Le théorème de stabilité des lois de Poisson assure que si somme des VA indépendantes, alors on obtient une VA qui suit une loi de Poisson de paramètre obtenu en sommant les paramètres. Ainsi Z_{n+1} suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(Z_n \lambda)$.

Q11.1. On propose le code suivant :

```
lambda_ = 0.7
    for k in range(10):
        plt.plot(galton_watson(lambda_, 20))
plt.show()
```

1
2
3
4

Q11.2. Il semble y avoir extinction presque sûrement si $\lambda < 1$. Si λ augmente, il semble que de plus en plus de populations survivent et avec de plus en plus des descendants.

Q12.1. On remplace la ligne 12 par

```
return 1
```

1

et la ligne 13 par

```
return 0
```

1

Q12.2. On propose le code suivant :

```
def extinction(lambda_):
    nb_extinction = 0
    for i in range(5000):
        nb_extinction += galton_watson_2(lambda_, 60)
    return nb_extinction/5000
```

1
2
3
4
5

qui estime bien p_λ par la loi des grands nombres.

Q13.1. On conjecture que $p_\lambda = 1$ si $\lambda < 1$ puis que p_λ décroît avec λ .

Q13.2. On considère l'épreuve de Bernoulli "la population s'est éteinte". Sa probabilité de succès est p_λ . On effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p_λ donc S_n , qui correspond au nombre de succès, suit une loi binomiale $B(n, p_\lambda)$.

Ainsi $\frac{S_n}{n}$ admet pour espérance p_λ et pour variance $\frac{1}{n^2}V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}np_\lambda(1 - p_\lambda) = \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev appliquée à $\frac{S_n}{n}$ donne donc :

$$\begin{aligned} P(|\frac{S_n}{n} - p_\lambda| > \varepsilon) &\leq \frac{V(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{p_\lambda(1 - p_\lambda)}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $p_\lambda \in]0, 1[$,

$$p_\lambda(1 - p_\lambda) - \frac{1}{4} = -p_\lambda^2 + p_\lambda - \frac{1}{4} = -(p_\lambda - \frac{1}{2})^2 \leq 0$$

donc $p_\lambda(1 - p_\lambda) \leq \frac{1}{4}$ et on obtient l'inégalité voulue.

Q13.3. On remarque que

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) &= 1 - P(|\frac{S_n}{n} - p_\lambda| > \varepsilon) \\ &\geq 1 - P(|\frac{S_n}{n} - p_\lambda| \geq \varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'avoir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 0.05 &\iff \varepsilon^2 \geq \frac{1}{0.2n} \\ &\iff \varepsilon \geq \sqrt{\frac{1}{0.2n}}. \end{aligned}$$

Q13.4. Pour $n = 5000$ on obtient $\varepsilon \approx 0,03$. Pour chacune des valeurs données on obtient comme p_λ approximé (par lecture graphique) :

$$\lambda = 1,05. \quad p_\lambda \approx 0,9 \text{ donc } 0,87 \leq p_\lambda \leq 0,93.$$

$$\lambda = 1,10. \quad p_\lambda \approx 0,85 \text{ donc } 0,82 \leq p_\lambda \leq 0,88.$$

$$\lambda = 1,15. \quad p_\lambda \approx 0,75 \text{ donc } 0,72 \leq p_\lambda \leq 0,78.$$