

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

UN PEU DE PHYSIQUE AUTOUR DES ARBRES

Ce sujet est composé de trois parties indépendantes. La première s'intéresse à la dispersion des pollens avec l'étude de la vitesse de sédimentation de ces grains et de la mesure précise de leur masse. La deuxième aborde la question de la montée de la sève brute depuis les racines vers les feuilles. Enfin, la dernière évalue l'évapo-transpiration au niveau des feuilles, responsable de la montée de la sève mais aussi du refroidissement de l'arbre. Un ensemble de données numériques utiles est disponible au début du sujet.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Données numériques utiles

Norme de l'accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Coefficient de tension superficielle pour l'interface eau-air à 20 °C	$\gamma = 73 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air à 20 °C et 1 bar	$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'air à 20 °C et 1 bar	$\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse molaire de l'eau	$M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 20 °C	$\ell_{\text{vap}} = 2,4 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Pression de vapeur saturante de l'eau à 20 °C	$P_{\text{sat}} = 2,3 \text{ kPa}$
Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air	$D = 0,3 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

I. Dispersion des pollens

Les grains de pollen, libérés par les parties mâles de la plante, permettent la fécondation de la partie femelle et donc la reproduction de la plante. Ils peuvent être transportés par certains insectes ou tout simplement par le vent. Dans le deuxième cas, la détermination de la vitesse de sédimentation des grains de pollen, c'est-à-dire la vitesse limite qu'ils atteignent en chutant dans l'air, est nécessaire pour évaluer la distance à laquelle ils peuvent être transportés dans l'atmosphère. Ceci permet de suivre et contrôler la dispersion des espèces, mais aussi de mieux évaluer les risques sanitaires liés aux allergies.

Vitesse de sédimentation

On considère un grain de pollen sphérique, de rayon r_p et de masse volumique ρ_p , qui tombe dans l'air de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η , en l'absence de vent. Dans ce cas, la force de trainée $\vec{f}$ associée aux frottements de l'air peut être modélisée par la loi de Stokes, de sorte que

$$\vec{f} = -6\pi\eta r_p \vec{v}$$

On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, avec $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire orienté verticalement vers le haut. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Q 1. En admettant que les grains de pollen sont essentiellement constitués d'eau, justifier qu'il est possible de négliger la poussée d'Archimède devant le poids des grains.

Q 2. On note $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_z$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ d'un grain de pollen.

Q 3. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique pour faire apparaître un temps caractéristique τ et la vitesse de sédimentation v_s , définie comme la norme de la vitesse atteinte en régime permanent

$$v_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{v}(t)\|$$

Exprimer τ et montrer que la vitesse de sédimentation s'écrit

$$v_s = \frac{2r_p^2 \rho_p g}{9\eta}$$

Le document 1 donne le protocole utilisé pour la mesure de la vitesse de sédimentation de grains de pollen de maïs de masse volumique $\rho_p \approx 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, transposable à des pollens issus d'arbres (Aylor et al., 2002).

Document 1 – Vitesse de sédimentation

Source : Settling speed of corn (*Zea mays*) pollen, D. E. Aylor, 2002.

Les mesures de vitesse de sédimentation v_s dans l'air immobile sont réalisées en chronométrant la durée de chute de grains de pollen dans un tube de décantation. Le diamètre intérieur du tube est de 0,02 m et sa longueur de 2,4 m. Des grains de pollen sont disposés au dessus du tube sur une fine feuille d'aluminium, percée en son centre d'un trou d'épingle (de diamètre $\sim 0,2 \text{ mm}$). Les mesures sont réalisées dans une pièce sombre. Les grains de pollen sont illuminés pendant leur chute par le dessous avec un éclairage à fibre optique. Le faisceau lumineux quasi-parallèle est centré et aligné avec l'axe du tube de décantation, orienté verticalement. La source lumineuse est située à $\sim 0,5 \text{ m}$ du tube. Le gradient vertical de température dans la pièce est stable en raison de la convection naturelle. La combinaison d'un gradient stable de température, de l'utilisation d'un tube fermé par le dessus (à l'exception du trou d'épingle) et de faible diamètre élimine toute convection dans le tube.

Document 1 (suite) – Vitesse de sédimentation

Cette absence de mouvement d'air dans le tube a été vérifiée en introduisant une petite bouffée de fumée (d'un bâton d'encens) dans le tube et en vérifiant qu'il restait stationnaire, ne montant ni ne descendant dans le tube. La fumée est restée stationnaire et visible pendant plusieurs minutes avant de se dissiper par diffusion. Ceci fut répété quelques fois sans qu'aucune convection ne soit détectable.

Chaque détermination de v_s est faite de la manière suivante. On tapote l'extérieur du tube pour causer la chute d'un petit nombre de grains de pollen à travers le trou d'épingle du dessus du tube. On chronomètre ensuite le temps nécessaire au pollen pour chuter d'une distance de 1,0 m. Le repère pour le lancement du chronométrage se situe à 0,4 m sous le trou d'épingle, bien en dessous de la région où les grains accélèrent, contenue dans une zone de moins de 0,05 m sous le trou. [...]

Des valeurs de v_s allant de $21 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ pour des grains de pollen de $76 \mu\text{m}$ à $80 \mu\text{m}$ de diamètre, à $32 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ pour des grains de $103 \mu\text{m}$ à $106 \mu\text{m}$ ont ainsi été mesurées.

Q 4. En exploitant le document 1, proposer une évaluation numérique de v_s et de τ . En déduire une limite supérieure à la distance parcourue par les grains de pollen de maïs pendant le régime transitoire. Est-ce cohérent avec les choix expérimentaux décrits dans le document 1 ?

Q 5. La loi de Stokes utilisée pour modéliser les frottements est valable si l'écoulement de l'air autour des grains lors de leur chute est laminaire. Proposer et mettre en œuvre un critère permettant de vérifier que l'écoulement est laminaire.

Le graphe ci-dessous représente l'évolution de la vitesse de sédimentation v_s en fonction du rayon des grains de pollen au carré r_p^2 .

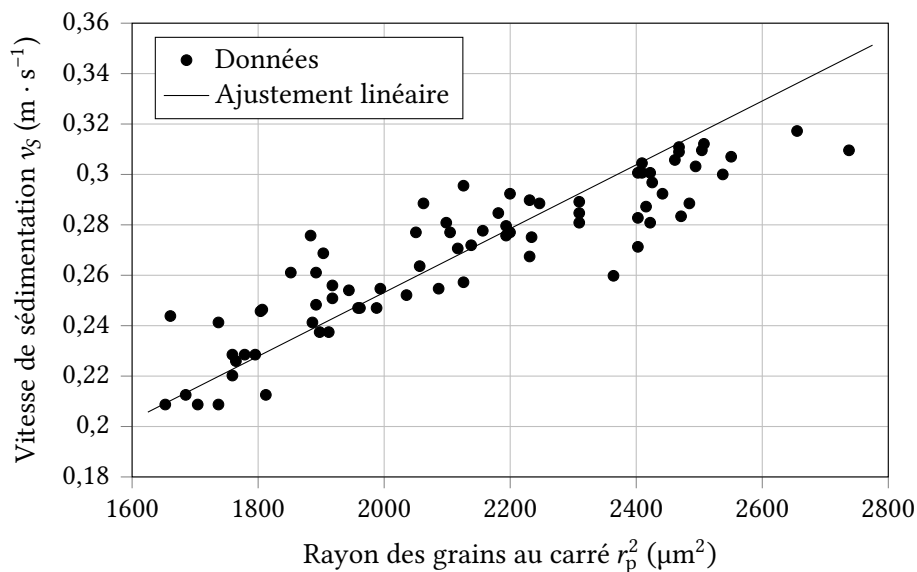


FIGURE 1 – Vitesse de sédimentation v_s des grains de pollen de maïs (Aylor et al., 2002) en fonction du carré de leur rayon r_p . Le coefficient directeur de l'ajustement linéaire $v_s(r_p^2) = ar_p^2$ réalisé avec Python est $a = (126,59 \pm 0,85) \times 10^6 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q 6. Justifier que, si les mesures sont en accord avec le modèle, la courbe $v_s = f(r_p^2)$ est une droite passant par l'origine. Donner l'expression et la valeur de son coefficient directeur.

Q 7. Le coefficient directeur obtenu par ajustement linéaire est-il en accord avec les données expérimentales ? On justifiera la réponse à l'aide d'un calcul d'écart normalisé. Discuter la pertinence de l'ajustement linéaire réalisé (Fig. 1).

Q 8. Les auteurs de l'article adoptent une modélisation plus fine des frottements de l'air et obtiennent

$$v_S^2 = \frac{8\rho_p r_p g}{3\rho_a C_x(\text{Re})} \quad \text{où} \quad C_x(\text{Re}) = 24\text{Re}^{-1} (1 + 0,158\text{Re}^{2/3})$$

et où Re est le nombre de Reynolds. Le coefficient $C_x(\text{Re})$ est appelé coefficient de traînée. Évaluer numériquement le terme correctif $0,158\text{Re}^{2/3}$ et montrer que l'on retrouve l'expression de la vitesse de sédimentation obtenue précédemment en le négligeant. Commenter.

Mesure de masse

La vitesse de sédimentation des grains de pollen dépend directement de leur masse volumique. Il est donc important de la connaître avec précision. La mesure du volume des grains peut être réalisée au microscope en mesurant leur diamètre.

La mesure de leur masse, de l'ordre de quelques nanogrammes à quelques centaines de nanogrammes, est toutefois plus délicate. En effet, les meilleures balances classiques actuelles atteignent des résolutions de l'ordre du dixième de milligramme. On passe ainsi habituellement par la pesée d'un échantillon de pollen, dont on évalue le nombre de grains par comptage dans un faible volume connu de solution dispersée obtenue à partir de l'échantillon (hémocytométrie).

On s'intéresse ici à une méthode alternative, qui repose sur l'utilisation d'un micro-oscillateur mécanique. Le comportement de ce système est bien décrit par un ensemble masse-ressort, composé d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . La masse M supposée ponctuelle, astreinte à se déplacer sur un axe (Ox) horizontal, n'est soumise qu'à la force de rappel du ressort.

Q 9. Lorsque le ressort est au repos, la masse est située à l'origine du repère. Représenter la situation sur un schéma puis établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la masse.

Q 10. Exprimer la fréquence propre f_0 des oscillations de la masse en fonction des paramètres du problème.

Pour déterminer la masse m d'un grain de pollen, on le dépose sur la masse M .

Q 11. Exprimer la nouvelle fréquence f à laquelle oscille le système. La comparer à celle de l'oscillateur à « vide ».

Q 12. En pratique la masse m est très faible devant la masse M de l'oscillateur, de sorte que $m \ll M$. Par un développement limité au premier ordre en m/M , exprimer le déplacement relatif en fréquence, défini comme

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0}$$

Q 13. Pour certains dispositifs, il est possible de mesurer des déplacements relatifs en fréquence de l'ordre de $\pm 50 \times 10^{-6}$. En déduire la masse de l'oscillateur nécessaire pour peser un grain de pollen de 10 ng.

II. Comment certains arbres peuvent-il devenir si grands ?

Les plus grands arbres au monde se trouvent actuellement en Californie du Nord, aux États-Unis. Il s'agit de séquoias de Californie, dont la hauteur dépasse les 100 m. Le plus grand d'entre-eux atteint 112 m.

Dans les arbres, la sève brute est une solution aqueuse diluée contenant des ions et des acides aminés. Elle est acheminée depuis les racines jusqu'aux feuilles dans les canaux du xylème dont le rayon varie entre 25 μm et 250 μm . On cherche ici à étudier certaines problématiques liées à l'ascension de la sève brute dans l'arbre.

Dans toute cette partie, la sève brute sera assimilée à de l'eau liquide pure, modélisée par une phase condensée incompressible et indilatable. De plus l'écoulement de la sève est supposé suffisamment lent pour que le fluide soit à l'équilibre mécanique à tout instant.

Statique des fluides

On considère un fluide de masse volumique ρ à l'équilibre mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note toujours $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur, où $\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire orienté selon la verticale ascendante.

Q 14. En écrivant la condition d'équilibre mécanique d'un volume élémentaire de fluide de hauteur dz , établir la relation fondamentale de la statique des fluides vérifiée par la pression $P(z)$ du fluide.

Q 15. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ dans un fluide dont la surface libre à l'altitude $z = 0$ est à la pression atmosphérique P_0 .

La théorie dite de cohésion (Dixon, 1894) suppose la présence de colonnes d'eau continues entre les racines et les feuilles dans les canaux du xylème pour le transport de la sève brute.

Q 16. Justifier que l'existence d'arbres dont la hauteur dépasse 10 m semble impossible.

Capillarité

On cherche à savoir si les forces capillaires peuvent expliquer l'ascension de la sève dans les canaux du xylème. On assimile l'un de ces canaux à un cylindre de rayon r . On note respectivement $\gamma_{LG} (= \gamma)$, γ_{SL} et γ_{SG} les coefficients de tension superficielle entre l'eau et l'air, entre l'eau et la surface des canaux et entre l'air et la surface des canaux. Dans une situation de mouillage partiel, on rappelle que l'angle de contact α (Fig. 2) entre le solide et le liquide vérifie la loi de Young-Dupré :

$$\cos \alpha = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma}$$

Q 17. Montrer que la quantité $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est homogène à une longueur. Cette longueur est appelée longueur capillaire. Calculer sa valeur dans le cas de l'eau.

Q 18. Le ménisque formé à l'interface eau-air est de forme sphérique dans le cas où son rayon est négligeable devant la longueur capillaire. Justifier que cette modélisation est valide dans le cas qui nous intéresse.

Lorsque l'on plonge dans l'eau un tube de rayon intérieur r faible, ouvert aux deux extrémités, on constate que l'eau monte dans le tube avant d'atteindre un nouvel équilibre.

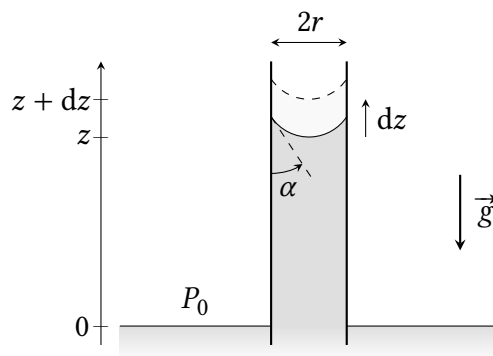


FIGURE 2 – Ascension capillaire.

Q 19. En considérant comme système l'ensemble de l'eau, montrer que la variation élémentaire d'énergie potentielle dE_{pp} causée par une ascension du niveau de l'eau dans le tube d'une hauteur dz s'écrit, au premier ordre en dz ,

$$dE_{pp} = \rho g \pi r^2 z dz$$

Q 20. Exprimer de même la variation élémentaire d'énergie de surface dE_{ps} associée à la même ascension du niveau de l'eau dans le tube d'une hauteur dz .

Q 21. En déduire qu'à l'équilibre, la valeur h de la hauteur z du liquide dans le tube vérifie la loi de Jurin

$$h = \frac{2\gamma}{\tilde{r}\rho g}$$

où $\tilde{r}$ est le rayon du ménisque sphérique dont on donnera l'expression en fonction de r et α .

Q 22. Vérifier que cette expression est cohérente avec la loi de Laplace

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{\tilde{r}}$$

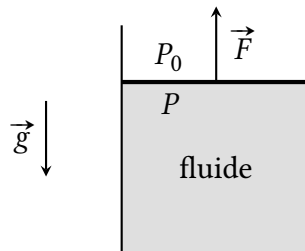
avec P_{int} et P_{ext} les pressions à l'intérieur (*i.e.* au-dessus) et à l'extérieur (*i.e.* en dessous) du ménisque.

Q 23. En supposant que le mouillage des canaux est total, évaluer numériquement la hauteur maximale de la colonne d'eau dans les canaux du xylème. Conclure.

Pression négative

Le concept de pression négative peut surprendre mais se comprend aisément en imaginant un fluide réel contenu dans un récipient. Lorsque les particules du fluide poussent sur les parois du contenant, la pression du fluide est positive, lorsqu'elles tirent dessus, elle est négative!

On considère un fluide contenu dans un cylindre de section S , fermé par un piston mobile sans frottement de masse négligeable. L'ensemble est placé dans l'air à pression ambiante P_0 . Un opérateur tire sur le piston en exerçant une force $\vec{F} = F\vec{e}_z$.



Q 24. Exprimer la pression P dans le fluide à l'équilibre en fonction de P_0 , F et S .

Q 25. Dans le cas où le fluide est de l'air assimilé à un gaz parfait, exprimer la force F_{max} maximale que peut appliquer l'opérateur sans rompre l'équilibre, en fonction de P_0 et S .

Si l'on remplit le cylindre avec de l'eau dégazée, c'est-à-dire qui ne contient aucun gaz dissous, il est possible d'observer un équilibre, même si l'opérateur applique une force de norme supérieure à F_{max} . Cet équilibre est qualifié de métastable : il peut être rompu à la suite d'une petite perturbation, comme un choc.

Q 26. Commenter alors le signe de la pression du fluide. Selon vous, quelle différence entre l'air et l'eau permet d'expliquer ce résultat ?

Q 27. Évaluer numériquement la pression de la sève brute au sommet du plus grand arbre actuellement existant. Commenter.

Cette valeur explique que l'arbre est sensible au stress hydrique. Si l'eau fait défaut au niveau des racines, des bulles de gaz peuvent se former dans les canaux ce qui empêche l'ascension de la sève. Plusieurs mécanismes, non discutés ici, permettent à l'arbre de s'en protéger dans une certaine mesure. L'existence de telles pressions est possible car une partie de l'eau est évaporée au niveau des feuilles : c'est l'évapo-transpiration.

III. Évapo-transpiration

La feuille est le lieu de nombreux échanges d'énergie et de matière entre l'arbre et son environnement. Dans cette partie, on s'intéresse aux échanges d'énergie en considérant tout d'abord une unique feuille. On note S la surface d'une des deux faces de la feuille, T la température de la feuille et $T_0 = 20^\circ\text{C}$ la température de l'air « loin » de la feuille. On négligera l'activité métabolique de la feuille.

Les transferts d'énergie seront comptés algébriquement selon la convention habituelle, c'est-à-dire positifs si le système reçoit de l'énergie de l'extérieur et négatifs sinon.

Convection et rayonnement

La convection et le rayonnement sont deux modes de transfert thermique qui contribuent au refroidissement de la feuille. Nous allons les étudier successivement.

Les échanges convectifs sont modélisés par une puissance thermique par unité de surface de la forme

$$j_{\text{th,c}} = h_c(T_0 - T)$$

où $h_c = 20 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ est le coefficient de transfert conducto-convectif.

Q 28. Exprimer la puissance thermique P_c reçue par la feuille par convection.

Q 29. Cette relation est analogue à la loi d'Ohm électrique : la différence de température joue le même rôle que la différence de potentiel électrique et la puissance thermique celui de l'intensité du courant électrique. En déduire l'expression de la résistance thermique R_c associée aux échanges convectifs.

Si les températures T et T_0 sont proches, les échanges radiatifs entre la feuille et son environnement s'expriment sous la forme d'une puissance thermique par unité de surface de la forme

$$j_{\text{th,r}} = h_r(T_0 - T)$$

avec $h_r = 5,7 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ à $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Q 30. Exprimer de même la résistance thermique R_r associée aux échanges radiatifs.

Q 31. En régime permanent et si la feuille ne reçoit aucun autre transfert d'énergie, exprimer puis calculer sa température T_1 . Faire de même pour la température T_2 si la feuille est exposée au Soleil, de sorte que sa face supérieure reçoit une puissance surfacique $j_{\text{th,s}} = 250 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Transpiration

Aux échanges d'énergie étudiés précédemment s'ajoutent des échanges gazeux par les stomates, les pores de la feuille. En particulier, lorsque l'air ambiant n'est pas saturé en vapeur d'eau, l'eau de la sève brute s'évapore, provoquant ainsi l'ascension de la sève dans les canaux du xylème. Ce mécanisme participe aussi au refroidissement de la feuille.

Lorsque la feuille est soumise à un courant d'air du fait de la convection naturelle ou forcée, il existe au voisinage de la surface de la feuille une fine couche d'air d'épaisseur δ appelée couche limite dans laquelle l'écoulement de l'air est laminaire. Les échanges de particules entre l'air « loin » de la feuille et l'air en contact avec la feuille ne se font donc que par diffusion. L'épaisseur de la couche limite dépend de nombreux paramètres. Dans des conditions raisonnables, elle est de l'ordre de quelques millimètres : on prendra $\delta = 2,0 \text{ mm}$ pour les applications numériques.

Loin de la feuille, c'est-à-dire pour $z > \delta$, la pression partielle P_e en eau et la densité volumique n_e de molécules d'eau dans l'air sont supposées uniformes. On suppose aussi qu'à la surface de la feuille, l'air est saturé en eau : en $z = 0$, la pression partielle en eau vaut P_{sat} et la densité volumique de molécules d'eau n_{sat} (Fig. 3). On considère ici que la température de la feuille est suffisamment proche de celle de son environnement, de sorte que $T = T_0$.

Dans toute la suite, on suppose que seule la surface supérieure de la feuille présente des stomates, ce qui est le cas chez de nombreuses espèces. On ne considèrera donc que cette face de la feuille dans le mécanisme de transpiration.

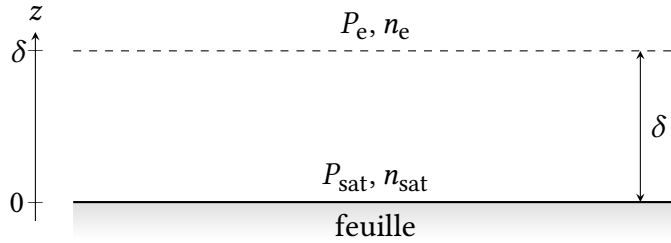


FIGURE 3 – Couche limite au voisinage de la surface de la feuille.

On appelle E le flux de particules, orienté dans le sens des z croissants sur une surface d'aire S . Dans ce cas, la loi de Fick permet d'écrire

$$E = -DS \frac{dn}{dz}$$

où $n(z)$ est la densité volumique de particules d'eau dans l'air à une distance z de la feuille et D le coefficient de diffusion.

Q 32. En régime permanent, à l'aide d'un bilan de particules entre les altitudes z et $z + dz$, montrer que $\frac{dn}{dz}$ ne dépend pas de z .

Q 33. Représenter graphiquement l'évolution de $n(z)$ pour $z \in [0; 2\delta]$. En déduire l'expression de E dans la couche limite en fonction de D , n_e , n_{sat} , S et δ .

Q 34. En supposant que la vapeur d'eau dans l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer n_e en fonction de P_e , N_A , R et T_0 .

Q 35. En déduire que le flux de particules d'eau s'écrit

$$E = -\frac{DN_A S}{\delta R T_0} (P_e - P_{\text{sat}})$$

Q 36. Exprimer la masse e d'eau qui s'évapore par unité de temps en fonction de E , N_A et de la masse molaire de l'eau M_e .

Q 37. Rappeler la valeur de la masse volumique de l'eau liquide et proposer une estimation raisonnable pour la surface S d'une feuille de chêne. Toujours dans le cas où $T \approx T_0$, en déduire une estimation de l'ordre de grandeur du volume d'eau qui s'évapore, chaque jour, d'un chêne mature dont le feuillage comporte environ 100 000 feuilles. On supposera que l'humidité relative P_e/P_{sat} de l'air est de l'ordre de 75 %. Commenter.

Q 38. Montrer finalement que la puissance thermique algébriquement reçue par la feuille et liée à l'évaporation s'écrit

$$P_{\text{vap}} = KS(P_e - P_{\text{sat}}) \quad \text{avec} \quad K = \frac{DM_e \ell_{\text{vap}}}{\delta R T_0}$$

où ℓ_{vap} est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

Q 39. En supposant que les résultats précédents restent valables pour de faibles écarts de température entre l'air et la feuille, évaluer la température T_3 d'une feuille exposée au Soleil, recevant une puissance surfacique $j_{\text{th},s}$ sur sa face supérieure, en tenant compte de tous les transferts d'énergie envisagés dans cette partie. Conclure.