Banque « Agro-Véto »
A TB - 0523

MATHÉMATIQUES
MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Exercice d'algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 et -2 sont les valeurs propres de A.
2. Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner une matrice P inversible, telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Calculer explicitement P^{-1}.
5. Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, D, P^{-1} et n. Justifier en rédigeant une récurrence.
6. Calculer explicitement les quatre coefficients de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On se donne à présent la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

7. Calculer u_2 et u_3.
8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Comparer les vecteurs AX_n et et X_{n+1}.
9. En déduire une expression de X_n en fonction de A, X_0 et n.
10. Donner enfin une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice d'analyse

Dans cet exercice on considère la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \geq 1$, par la relation :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et positive. Pour tout $x \geq 0$, montrer alors que l'on a les deux inégalités :

   $$0 \leq \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

   Ces inégalités pourront être utilisées dans la suite de l'exercice.

2. Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   On **admet** que la fonction $u : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc admet une primitive sur $[1, +\infty[$. On note U une primitive de u dans la suite de l'exercice.
   On ne cherchera pas à calculer U.

3. Notons g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par la relation $g(x) = U(2x)$.
   Montrer que g est dérivable sur $[1, +\infty[$, et prouver que pour tout $x \geq 1$ on a :

   $$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

4. Montrer que f est dérivable et que l'on a, pour tout $x \geq 1$:

   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

5. Donner le sens de variation de la fonction f.
   On pourra utiliser l'une des deux inégalités de la question 1.

Exercice de probabilités

Dans cet exercice on fixe p et q deux réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

On considère la situation d'un chat domestique. Son propriétaire quitte chaque matin la maison et ne rentre que le soir. Chaque jour, à l'instant du départ de son propriétaire, le chat est confronté à un choix : ou bien rester à la maison; ou bien décider de passer la journée dehors. Les ouvertures de la maison étant toutes closes, et la porte d'entrée de la maison ne disposant pas de chatière, le chat devra passer sa journée soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de la maison. On se rend compte que, lorsque le chat choisit de rester à l'intérieur de la maison un jour donné, la probabilité qu'il choisisse de rester de nouveau à la maison le lendemain est égale à p. Lorsque le chat passe la journée dehors, la probabilité qu'il décide de rester dans la maison le lendemain vaut q.

Tout ceci se déroule sur une période de temps où les jours sont indexés par $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire qu'ils sont numérotés $1, 2, 3, \dots$; de façon plus générale un jour possède un numéro n non nul. Ceci autorise, pour tout entier naturel n strictement positif, à considérer les évènements A_n et B_n suivants :

A_n : « le chat reste à la maison le n-ème jour »

B_n : « le chat passe la journée dehors le n-ème jour ».

Ainsi B_n est simplement l'événement contraire de A_n. On pose $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. On suppose qu'au premier jour le chat choisit de passer la journée dehors, ainsi $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. Quelle relation simple existe, pour tout entier naturel n non nul, entre a_n et b_n ?
2. On considère les égalités suivantes, dont certaines traduisent correctement l'énoncé, et d'autres non :

$$P_{A_n}(A_n) = p\ ; \quad P_{A_{n+1}}(A_n) = p\ ; \quad P(A_n \cap A_{n+1}) = p\ ; \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = p\ ;$$
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = p\ ; \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = q\ ; \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = q\ ; \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = p.$$

   Recopier sur votre copie les égalités justes, c'est-à-dire celles qui traduisent l'énoncé correctement. On ne demande pas de corriger les autres. On rappelle que la notation $P_X(Y)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement Y sachant l'événement X.
3. Donner les valeurs de $P_{B_n}(B_n)$ et de $P_{B_n}(B_{n+1})$ pour tout entier naturel n non nul.
4. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a la relation :

$$a_{n+1} = (p-q)a_n + q.$$

5. On note $\ell = \dfrac{q}{1+q-p}$.
   (a) Montrer que $1+q-p$ est non nul (et donc, que le réel ℓ est bien défini).
   (b) Simplifier l'expression $(p-q) \times \ell + q$.
   (c) Montrer que l'on a $a_n = -\ell(p-q)^{n-1} + \ell$ pour tout entier naturel n non nul.
   Indication : raisonner par récurrence.
6. Pour $n \geq 1$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le chat reste à la maison le n-ème jour, et valant 0 sinon. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n en fonction de a_n.

FIN DU SUJET