Banque « Agro-Véto »
A TB - 0521

MATHÉMATIQUES : MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 3 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'Algèbre

Dans cet exercice, les matrices sont toutes de taille 3×3 et à coefficients réels. En cas de besoin, on pourra noter I_3 la matrice identité, et $\mathscr{B}_c$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que le vecteur $(1, 0, 0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.
2. Démontrer que 4 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé.
3. *Sans justifier*, donner un réel a tel que le vecteur $(a, 1, 0)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 3. *(On demande seulement la valeur correcte de a).*

   *Les trois questions précédentes permettent de montrer que A est diagonalisable : on l'**admet** ici.*
4. *Sans justifier* donner une matrice D diagonale et une matrice P_0 inversible vérifiant les deux conditions suivantes :
   - $D = P_0^{-1} A P_0$
   - La matrice P_0 est de la forme $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{pmatrix}$ où a est le réel trouvé plus haut, et x_0, y_0 et z_0 sont trois réels que l'on précisera.
     (On demande seulement les expressions correctes de D et de P_0, sans justification.).

On rappelle que u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Soit F l'ensemble suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ u(x, y, z) = 4(x, y, z)\}$$

5. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner une base de F.

Soit $(x, y, z) \in F$. On définit la matrice $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, où a est le réel trouvé à la question 3.

7. Calculer le produit suivant : $M_{x,y,z} \times D$. Calculer aussi le produit : $A \times M_{x,y,z}$.
8. Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le vecteur (x, y, z) appartient à F si, et seulement si, on a la relation $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$.
9. Soit Q une matrice inversible telle que $D = Q^{-1}AQ$. A-t-on obligatoirement $Q = P_0$?

Exercice de Probabilités

L'objectif de cet exercice est d'étudier la notion de fonction génératrice d'une variable aléatoire dans deux cas particuliers. Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $E[X]$ l'espérance de X.

A. Etude d'une première variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $V = 2^U$. La variable aléatoire V ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 (lorsque $U = 0$) et 2 (lorsque $U = 1$).

1. Montrer que $P(V = 2) = p$
2. Déterminer alors la loi de V en fonction de p. On donnera le résultat sous la forme d'un tableau.
3. On définit $g_U = E[2^U]$; on a donc simplement $g_U = E[V]$. Calculer la valeur de g_U en fonction de p.
4. Montrer que si $g_U = 2$, alors la variable aléatoire U suit une loi certaine.

B. Etude d'un autre cas

On se donne à présent une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On note $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. On pose $g_X = E[2^X]$ et $h_X = E[(-1)^X]$.

1. Exprimer $P(X = 2)$ en fonction de p et de q.

   On va à présent exprimer h_X et g_X en fonction de p et de q.

2. On définit $Z = (-1)^X$. Donner les deux valeurs que peut prendre la variable aléatoire Z.
3. Calculer $P(Z = 1)$ en fonction de q.
4. Montrer que $h_X = 1 - 2q$.
5. Calculer aussi g_X en fonction de p et q grâce au théorème de transfert.
6. Cas particulier : lorsque X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, calculer g_X et h_X.

C. Caractérisation de la loi

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1-2y=\dfrac{1}{3} \\ 4-3x-2y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues réelles. Résoudre ce système.

2. On se donne à nouveau une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On *suppose* que $E[2^X]=\dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X]=\dfrac{1}{3}$. Montrer qu'alors X suit la loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

3. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi uniforme si, et seulement si, $E[2^X]=\dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X]=\dfrac{1}{3}$.

Exercice d'Analyse

On définit deux fonctions f et g en posant, pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

A. Etude des fonctions f et g

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. La fonction f est-elle paire, impaire ? Même question pour g.
3. Calculer la dérivée de $x\mapsto e^{-x}$.
4. On *admet* que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Prouver que $g'=f$.
5. Exprimer de même f' en fonction de g.
6. (a) Si x est un réel, donner le signe de e^x, puis donner le signe de e^{-x}.
   (b) Donner alors le signe de la fonction f sur $]-\infty,+\infty[$.
7. (a) Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction g sur $]-\infty,+\infty[$.
   (b) Quel est le signe de g sur $]-\infty,+\infty[$?
8. Donner le sens de variations de la fonction f sur $]-\infty,+\infty[$.
9. Dresser le tableau des variations de f sur $]-\infty,+\infty[$. On fera en particulier apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la valeur de $f(0)$.

B. Etablissement de formules

On considère la fonction $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par la relation suivante :

$$u(x)=\big(f(x)\big)^2-\big(g(x)\big)^2$$

On admettra, sans nécessité d'en donner la preuve, que les fonctions u, $x\mapsto\big(f(x)\big)^2$ et $x\mapsto\big(g(x)\big)^2$ sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a la relation $2f(x)g(x) = g(\alpha x)$, où α est un réel que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \left(f(x)\right)^2$. On pourra exprimer le résultat en utilisant f, g, α.
3. Pour tout réel x, calculer $u'(x)$.
4. En déduire que pour tout réel x, on a $\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 = 1$.

C. Une fonction de deux variables

On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour tous x, y par :

$$h(x,y) = \left(f(x)\right)^2 - \left(g(y)\right)^2$$

On cherche un éventuel extremum local pour cette fonction. On admet l'existence des dérivées partielles de h, notées $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.

1. Calculer $h(x,x)$ pour tout réel x.
2. (a) Montrer que $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = g(2x)$.
   (b) Exprimer selon la même méthode $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$.
   (c) Question de cours : énoncer une condition nécessaire pour qu'en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, la fonction h admette un extremum local.
   (d) Donner le seul point qui satisfait cette condition, pour la fonction h, dans cet exercice.
3. (a) Donner le signe de $h(x,0) - h(0,0)$ lorsque x est un réel.
   (b) Etudier aussi le signe de $h(0,x) - h(0,0)$ lorsque x est un réel.
4. Conclure.

FIN DU SUJET