Banque « Agro-Véto »
A TB - 0520

Mathématiques :
Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera son sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'Algèbre

Si a est un nombre réel, on note $M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$. On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_a.

Par ailleurs, on rappelle que si (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, le nombre réel $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la **norme** du vecteur (x, y).

1. Exemples :
   (a) Calculer M_0, $M_{\frac{\pi}{2}}$ et M_π. (Autrement dit : calculer M_a dans les cas $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$ et $a = \pi$).
   (b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Donner un réel $a \in [0, 2\pi[$, tel que $A = M_a$.
2. Premières propriétés.
   (a) Calculer le déterminant de M_a. L'application f_a est-elle bijective ? Que dire du noyau de f_a ?
   (b) Calculer $f_a(1, 0)$ et $f_a(0, 1)$. En déduire alors $||f_a(1, 0)||$ et $||f_a(0, 1)||$.
   (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que le vecteur $f_a((x, y))$ et le vecteur (x, y) ont la même norme.
   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f_a et $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé.
   Montrer que $||f_a(u)|| = |\lambda| \times ||u||$. En déduire que λ vaut soit 1, soit une autre valeur réelle que l'on précisera.
3. On s'intéresse aux valeurs propres **complexes** de M_a.

(a) Fixons $a \in \mathbb{R}$. Trouver des coefficients α et β **réels**, que l'on exprimera en fonction de a, et vérifiant pour tout nombre complexe z :

$$(z - e^{ia})(z - e^{-ia}) = z^2 - 2\alpha z + \beta$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant de $M_a - \lambda I_2$ vaut $(\lambda - e^{ia})(\lambda - e^{-ia})$.

(c) Pour quelles valeurs de λ, la matrice $M_a - \lambda I_2$ est-elle *non* inversible ?

(d) Expliquer pourquoi les valeurs propres (complexes) de M_a sont e^{ia} et e^{-ia}.

4. Application : Existe-t-il un réel a et une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_a est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$? *Indication : Chercher d'abord les valeurs propres de cette matrice. Sont-elles de la forme e^{ia} et e^{-ia} ?*
5. Si a et b sont deux nombres réels, montrer que $M_{a+b} = M_a M_b$.
6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un réel $a \in]0, 2\pi[$ tel que $M_a^n = I_2$. On exprimera un tel réel a en fonction de n et de π.

Exercice d'Analyse

On rappelle le résultat suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction u définie et dérivable sur I. Si on a $u'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors u est constante sur I.

On rappelle que la fonction arctangente, notée arctan, est la bijection réciproque de la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a la relation pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Rappeler la valeur de $\arctan(0)$ et de $\arctan(1)$.
2. Rappeler la valeur de la limite de arctan en $+\infty$.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(\frac{1}{x})$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer la dérivée de la fonction f. *Attention, on rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables, la dérivée de leur composée est donnée par la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$*
4. Calculer, pour tout x non nul, $\arctan'(x) + f'(x)$.
5. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. *On précisera soigneusement les théorèmes employés.*
6. Si x est strictement négatif, donner la valeur de $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. *On rappelle que* arctan *est impaire.*
7. Le résultat rappelé en début d'énoncé, reste-t-il vrai si I n'est pas un intervalle ?
8. Calculer la limite de $\dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$ lorsque x tend vers 0.
9. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \left(x\arctan(\frac{1}{x})\right) = 1$.
10. Donner alors un équivalent **très simple** de la suite (u_n), de terme général $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

Exercice de Probabilités

Si l'on dispose de k jetons que l'on place au hasard dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie 1. est indépendante des suivantes.

1. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$, et de deux urnes a et b.

Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a, et une chance sur deux d'être dans l'urne b. Il en est de même pour chacun des quatre autres jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X, l'événement « L'urne a est vide » . Faire de même avec l'événement « L'urne b est vide » .
3. En déduire la probabilité de l'événement « L'une des deux urnes est vide » .

On aborde maintenant le cas central de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$, et de **trois** urnes appelées a, b et c.

De même que précédemment chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, une chance sur trois d'être dans l'urne b, et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

2. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit E_i l'événement « le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'événement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'événement E_i.
2. Soit V_a l'événement « l'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5.
3. En déduire que $P(V_a) = \dfrac{2^5}{3^5}$.

   Par symétrie du problème, on pourra admettre que $P(V_b)$ et $P(V_c)$ ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N.

3. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$.

1. Que signifie en français l'événement $(N = 3)$? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*
2. Que signifie, en français, l'événement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer alors $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.

   On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.
3. Calculer la probabilité de l'événement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'événement $(N = 2)$ en fonction d'événements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

4. Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N.

1. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (qui vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon). Reconnaître la loi, et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a, Z_b et Z_c.

2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c.
3. Calculer alors l'espérance de N.

5. Loi de N

1. Montrer que $P(N=1)+2P(N=2)=\dfrac{2^5}{3^4}$
2. En déduire la valeur du réel $P(N=1)$.
3. Donner enfin la loi de la variable aléatoire N. On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

FIN DU SUJET