Exemple 1

1. Question de cours.

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

---

2. Exercice.

Un magasin possède une caisse, toutes les personnes qui sortent du magasin doivent passer par cette caisse y compris si le client n'achète pas d'article. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire réelle égale au nombre d'articles achetés par le k-ième client. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre μ.
On note N le nombre aléatoire de clients qui passent par la caisse au cours de la première heure, N suit une loi de Poisson de paramètre λ et est indépendante des X_k.
On souhaite étudier le nombre X d'articles passant par cette caisse durant la première heure.

1. Exprimer X en fonction de N et des X_i.
2. Écrire une fonction Python X qui prend en entrée l pour λ et m pour μ et qui simule la variable aléatoire X. On pourra pour cela utiliser la fonction `poisson` du module `numpy.random`
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $P_{(N=0)}(X = n)$.
4. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $X_1 + \ldots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\mu$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} \mathrm{e}^{-(\lambda+k\mu)}$.
6. Montrer que $E(X) = \lambda\mu$. On admettra l'existence de $E(X)$ et on pourra procéder sans justification à une permutation de deux sommes infinies.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P(X = 0) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{-\mu} - 1\right)\right) \text{ et } P(X = n) = \frac{\mu^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda \mathrm{e}^{-\mu})$$
où $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$. On pose aussi $f_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
8. Exprimer f_0 et f_1 à l'aide des fonctions usuelles.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} f_i(x)$$
<u>Indication</u> : On pourra utiliser le changement de variable $l = k - 1$.
10. En déduire une expression de la fonction f_2.
11. Écrire une fonction f qui prend en entrée un entier n et un réel x et qui renvoie la valeur $f_n(x)$. On pourra utiliser la fonction `binom` du module `scipy.special`.
12. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels λ et μ et un entier n et qui renvoie $\mathbb{P}(X = n)$. On pourra utiliser la fonction `factorial` du module `scipy.special`.

Exemple 2

1. Question de cours.

Densité d'une loi normale centrée réduite.

---

2. Exercice.

Rappel : Algorithme de dichotomie.

Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un réel α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :
  - si $f(a_k)\, f(c_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  - sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes deux vers α.

On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par l'expression

$$f(x) = \ln x + x$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes x_n pour n allant de 1 à 10, et les représenter graphiquement.
   (c) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$).
2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln x < x$.
   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire un équivalent de x_n.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n$.
4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$
   (a) Exprimer $u_n - 1$ en fonction de x_n et n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) En déduire que $1 - u_n \sim \dfrac{1}{n}$
   (c) En déduire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

Exemple 3

1. Question de cours.

Donner deux conditions suffisantes et non nécéssaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

---

2. Exercice.

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1-p$.
Soit n un entier non nul fixé.
On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose X_i le nombre de lancers du i-ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Quelle est la loi de X_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$?
   Rappeler son espérance et sa variance.
2. Calculer pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X_i > j)$.
3. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Calculer $P(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
4. Écrire une fonction Python `NbMin(L)` prenant en argument une liste `L`, et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.
5. En déduire une fonction Python `N(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et de p, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.
6. Calculer $P(N = n)$.
7. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(N=k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1-q^n}.$$
8. En déduire l'espérance de N et la variance de N.
9. Vérifier la valeur de $E(N)$ à l'aide d'estimations construites grâce à de la fonction `N` de la question 5.

Exemple 4

1. Question de cours.

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

---

2. Exercice.

2. Exercice.

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel que l'on notera $<,>$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Que permet le programme suivant ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[5/2,1,1/2],[1,2,1],[1/2,1,5/2]])
I=np.eye(3)

r=al.matrix_rank(A-I)
s=al.matrix_rank(A-2*I)
t=al.matrix_rank(A-4*I)
```

   (c) À l'aide de Python, déterminer une base de de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
   (d) Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?
   (e) Proposer une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. On notera $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ cette base.
2. On considère l'application φ définie sur E^2 par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) =< u, f(v) >$$

   (a) Soit u (resp. v) un vecteur de E de coordonnées X (resp. Y) dans B.
      i. Exprimer $\varphi(u, v)$ en fonction de A, X et Y.
      ii. Exprimer $\varphi(v, u)$ en fonction de A, X et Y.
      iii. Montrer que $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
   (b) On note pour tout $u \in E$, F_u l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u et $F'_u = \{v \in E \text{ tel que } \varphi(u, v) = 0\}$.
      i. Montrer que si u est un vecteur propre de f, alors $F_u = F'_u$.
      ii. A-t-on toujours $F_u = F'_u$?

Exemple 5

1. Question de cours.

Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

---

2. Exercice.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur cet espace suivant la loi normale centrée réduite. On note φ la fonction densité continue de X, Φ sa fonction de répartition, f la fonction $x \longmapsto P(X > x)$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + xy(x) = 0$$

On considère la fonction M définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E). Montrer que φ est solution de (E).
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} \mathrm{d}t$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$. Déterminer la limite de M en $+\infty$.
4. (a) Montrer que f est dérivable et exprimer sa fonction dérivée f' en fonction de φ.

   (b) Montrer que la fonction M est dérivable.
   Calculer sa dérivée M' à l'aide des fonctions f et φ.
   En déduire le sens de variation de M sur $\mathbb{R}^+$.
5. (a) Écrire un script Python permettant d'afficher sur un même graphique les courbes des fonctions $x \longmapsto M(x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ sur l'intervalle $]0, 5]$.
   Pour calculer $f(x)$, on pourra utiliser la fonction `norm.sf()` du module `scipy.stats`

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x > 0, \ f(x) = \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3} \mathrm{d}t.$$

   (c) Montrer que pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant M(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

   (on pourra intégrer une deuxième fois par parties).
   En déduire un équivalent de $M(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple 6

1. Question de cours.

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

---

2. Exercice.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 ((1-x)e^x)^n \, dx$.

1. Justifier que la suite (I_n) est ainsi bien définie, et calculer I_0 et I_1.
2. (a) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$I_n = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) e^{k/N} \right)^n \right).$$

   (b) Ecrire alors une fonction en Python qui prend en argument un entier n et renvoie une valeur approchée de I_n.

   (c) Utiliser la fonction précédente pour donner une conjecture sur la limite éventuelle de $\sqrt{n} I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

   (b) Étudier les variations de la suite (I_n).
4. Pour tout réel $x \in]0,1[$, on pose $H(x) = -\dfrac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))$.

   (a) Démontrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0.
   On notera encore H son prolongement, et on admet que H réalise une bijection croissante de $[0,1[$ vers $[1,+\infty[$.

   (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2} H(x)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) du.$$

   (c) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$, et en déduire que pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Soit (u_n) une suite de réels appartenant à $[0,1]$ qui converge vers 0, et telle que la suite $(\sqrt{n} u_n)$ diverge vers $+\infty$.

   (a) Donner l'exemple d'une telle suite.

   (b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = H(u_n)$.
   Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{\sqrt{nv_n}u_n} e^{-u^2/2} du.$$

   (c) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exemple 7

1. Question de cours.

Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

---

2. Exercice.

Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts.
Soit A la matrice défine par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on pose :

$$s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_j, \quad p_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_j \quad \text{et } d_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (a_i - a_j).$$

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A, sous forme de liste de listes.
2. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier i et une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3, et renvoie une liste contenant les valeurs de s_i, p_i et d_i.
3. Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

   (a) Démontrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

   (b) On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice représentative de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

   (c) Déterminer le noyau de φ, et en déduire que φ admet une réciproque, notée φ^{-1}.

4. Pour tout entier $i \in [\![1,3]\!]$, on pose : $L_i(X) = \dfrac{1}{d_i} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (X - a_j)$.

   (a) Démontrer que : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

   (b) A l'aide des questions précédentes, démontrer que la matrice A est inversible, et déterminer A^{-1}. (On exprimera les coefficients de A^{-1} en fonction des réels s_i, p_i et d_i.)

   (c) Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A^{-1}, sous forme de liste de listes. Appliquer cette fonction avec $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 4$.

Exemple 8

1. Question de cours.

Pour n un entier naturel, rappeler les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

---

2. Exercice.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \dfrac{1}{T}$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W.

1. Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de renvoyer un nombre de façon aléatoire en suivant la loi exponentielle de paramètre 1 :

```python
def expo():
    return -log(random())
```

2. Écrire un script en langage Python qui permette de conjecturer l'existence et la valeur de l'espérance de W.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
   Démontrer alors que T admet une densité, et déterminer une de ses densités.
4. Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale : $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.
5. (a) Justifier que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1 + u$.
   (b) En déduire que : $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leqslant e^{-t}$.
   (c) Démontrer que l'intégrale I est convergente.
6. À l'aide du changement de variable, $u = 2t$, démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$
   On admettra que les intégrales de l'égalité sont bien convergentes.
7. Démontrer alors que $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(2 \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$.
8. En utilisant le théorème des gendarmes, démontrer que l'espérance de W vaut $2\ln(2)$.

Exemple 9

1. Question de cours.

Formules d'Euler et de Moivre.

---

2. Exercice.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(T_1, \ldots, T_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On note pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i = T_i^2$ et $H_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

On souhaite montrer que pour tout $t > 0$:

$$P\left(H_n - E(H_n) \geqslant 2\sqrt{nt} + 2t\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \quad (E)$$

1. (a) Écrire une fonction `simule` en `Python` qui prend en entrée un entier n et qui simule la variable aléatoire H_n.
   (b) Monter que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance et déterminer sa valeur.
   (c) En déduire que H_n admet une espérance et qu'elle vaut n.
   (d) À l'aide de la question 1a donner une estimation pour $t = 1, 2, 3$ et $n = 100$ de $P\left(H_n - E(H_n) \geqslant 2\sqrt{nt} + 2t\right)$ ainsi que la valeur $\exp(-t)$.
2. (a) Soient $u \in [0, 1/2[$ et $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que la variable aléatoire $\exp(u(X_i - 1))$ admet une espérance et que cette espérance vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-2u}}\mathrm{e}^{-u}$.
   (b) En déduire que pour tout $u \in [0, 1/2[$, $\exp(u(H_n - n))$ admet une espérance et sa valeur.
   (c) Soient $u \in [0, 1/2[$. On note $\psi(u) = \ln\left(E\left(\exp(u(H_n - n))\right)\right)$. Simplifier l'expression $\psi(u)$.
   (d) Montrer que pour tout $u \in [0, 1/2[$, $\psi(u) \leqslant n\dfrac{u^2}{1-2u}$.
   (e) Utiliser la question précédente pour montrer que pour tout $u \in [0, 1/2[$ et tout $\lambda > 0$, on a :

   $$P(H_n - n \geqslant n\lambda) \leqslant \exp\left(-n\left(u\lambda - \frac{u^2}{1-2u}\right)\right)$$

   (f) Soit $\lambda > 0$. Justifier que $u_m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2\lambda+1}}$ appartient à $[0, 1/2[$, calculer $u_m\lambda - \dfrac{u_m^2}{1-2u_m}$ et en déduire que $P(H_n - n \geqslant n\lambda) \leqslant \exp\left(-n\dfrac{\lambda + 1 - \sqrt{2\lambda+1}}{2}\right)$
   (g) En prenant $\lambda = 2\sqrt{t/n} + 2t/n$, en déduire l'inégalité (E).

Exemple 10

1. Question de cours.

Donner la valeur de $E(X^2)$ si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

---

2. Exercice.

Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qu'on suppose de norme 1, et soit $V = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}$$

1. Écrire une fonction Python, prenant en entrée un vecteur $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et renvoyant le vecteur $f(w)$ si u est de norme 1, et renvoyant `False` sinon.
2. Calculer AV. En déduire le rang de f et une base de $\text{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
   On pourra distinguer plusieurs cas en fonction des valeurs de a, b et c.
4. Vérifier que tout vecteur de $\text{Ker}(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im}(f)$.
5. On rappelle que pour tout couple (x, y) de vecteurs e $\mathbb{R}^3$ représentés matriciellement par des matrices colonnes respectives X et Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire $\langle x, y\rangle$ est égal à ${}^tXY$.
   Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0$$
6. En déduire que $Sp(f) \subset \{0\}$.
7. La matrice A est-elle diagonalisable ?
8. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $C = A^2 + I_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $C = V\,{}^tV$.
   (b) Justifier que C est diagonalisable.
   (c) Déterminer les valeurs propres de C.

Exemple 11

1. Question de cours.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une variance, que vaut $V(X+Y)$?
Que dire si X et Y sont indépendantes ?

---

2. Exercice.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On étudie la diffusion d'une information.
•À l'instant $n = 0$, une seule personne possède cette information et la trouve intéressante.
• Si une personne trouve cette information intéressante à un instant $n \in \mathbb{N}$, elle la diffuse à N nouvelles personnes qui n'étaient pas au courant jusqu'alors, et qui sont alors au courant à l'instant $n+1$.
• Il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'une personne donnée trouve cette information intéressante, à tout instant.
• On suppose par ailleurs que toutes les personnes mises au courant sont différentes les unes des autres. Ainsi, une personne n'est jamais mise au courant en même temps par deux personnes différentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de nouvelles personnes ayant reçu l'information à l'instant n exactement et qui l'ont trouvé intéressante.

1. Écrire en Python une fonction `X(n,N,p)` qui prend en arguments des entiers `n` et `N`, un flottant `p`$\in]0,1[$, qui simule l'expérience décrite et qui retourne le nombre de personnes qui reçoivent l'information à l'instant `n` et qui vont ensuite la transmettre.
2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(X_n = 0)$.
   Justifier que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge. On ne cherchera pas à déterminer la limite.
4. (a) Expliquer à l'aide d'une interprétation pourquoi nous avons l'égalité : $P_{(X_1=k)}(X_{n+1} = 0) = u_n^k$.
   (b) En considérant un système complet d'événements relatif à X_1, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^N.$$
5. Dans la suite de l'énoncé, on se place dans le cas où $N = 2$. La suite étudiée vérifie donc la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^2.$$
   (a) Montrer que les limites possibles sont 1 et $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$.
   (b) On se place dans le cas où $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Comparer alors 1 et $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$. Quelle est alors la limite de la suite (u_n) ? Interpréter ce résultat.
   (c) On se place dans le cas où $p > \dfrac{1}{2}$. On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto (1 - p + px)^2$.
   Montrer que pour tout $x \in [0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}]$, $f(x) \in [0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}]$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exemple 12

1. Question de cours.

Énoncer le théorème d'intégration par parties sur une intégrale.

---

2. Exercice.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.
On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule dans l'urne avant le tirage suivant.
On note pour tout $k \geqslant 1$, X_k le numéro obtenu au k-ième tirage, et Z_k le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. (a) Écrire une fonction Python `NbDiff(L)` prenant en argument une liste `L` et qui renvoie le nombre d'éléments distincts présents dans cette liste.
   (b) Écrire une fonction Python `Z(N,k)` qui, prenant en arguments les valeurs de N et k, et renvoie une simulation de Z_k.
   (c) Estimer l'espérance de Z_k à l'aide de votre programme, et conjecturer son comportement lorsque :
      i. $N = 10$ et $k \to +\infty$
      ii. $k = 10$ et $N \to +\infty$
      iii. $N = k$ et $N \to +\infty$
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2.
   En déduire $\mathbb{E}[Z_1]$ et $\mathbb{E}[Z_2]$.
3. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathbb{P}(Z_k = k)$.
   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{N-\ell+1}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   (c) En déduire : $\mathbb{E}[Z_{k+1}] = \dfrac{N-1}{N}\mathbb{E}[Z_k] + 1$.
4. Montrer alors que pour tout $k \geqslant 1$
$$E(Z_k) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right)$$
5. Déterminer un équivalent de $E(Z_k)$ dans les trois cas suivants, en comparant avec vos résultats numériques de la question 1(c)
   i. lorsque N est fixé et $k \to +\infty$
   ii. lorsque k est fixé et $N \to +\infty$
   iii. lorque $N = k$ et $N \to +\infty$